

(每個答案 5 分，共 100 分)

1. 若 f 為一連續函數，試證明

$$\frac{d}{dx} \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(t) dt = f(g_2(x))g_2'(x) - f(g_1(x))g_1'(x)$$

2. 試繪出函數圖形並求出其反曲點

$$f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x + 1.$$

3. 試求下列之極限 (a) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{a^x + b^x + c^x}{3} \right)^{\frac{1}{x}}$ (b) $\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{1}{x-1} - \frac{1}{\ln x} \right)$ 。

4. 試求下列之 $\frac{dy}{dx}$ (a) $y = \ln \ln \ln x$ (b) $y = \log \sqrt{\frac{x^2-1}{x^2+1}}$ (c) $\sqrt{xy} + 3y = 7x$ 。

5. $f(x) = x + 2 + \frac{1}{x-3}$ ， $[a, b] = [-1, 2]$ ，請利用均值定理求出結論中的 c 值。

6. 試求下列之積分 (a) 求 $\int_0^3 |2-x| dx$ (b) $\int \frac{\sqrt{1+\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} dx$ (c) $\int e^{x^2+\ln x-2} dx$

(d) $\int x \ln x dx$ (e) $\int x^3 e^{-x^2} dx$ 。

7. 試求 $y = x^3 - x^2 - 6x$ 與 $y = 0$ ，所圍之區域面積。

8. 試求 $f(x, y) = x^2 y - 2xy + 2y^2 - 15y$ 之鞍點。

9. 若 $f(x)$ 與 $g(x)$ 均為可微分函數，試證明

$$(f \circ g)'(x) = f'(g(x))g'(x)。$$

10. 若 $f(x)$ ， $g(x)$ 與 $\frac{f(x)}{g(x)}$ 均為可微分函數，且 $g(x) \neq 0$ 試證明

$$\frac{d}{dx} \left(\frac{f(x)}{g(x)} \right) = \frac{g(x)f'(x) - f(x)g'(x)}{g^2(x)}。$$

11. (a) $\frac{d}{dx} \int_{3x}^{2x^2+1} \frac{4t}{9+2t^3} dt$ (b) $\int_0^{\ln 2} \int_0^{\ln 3} e^{x+2y} dy dx$ (c) $\int e^{-x} \cos x dx$ 。