南華大學企業管理學系管理科學博士班博士論文

A DISSERTATION FOR THE DEGREE OF DOCTOR OF PHILOSOPHY

Ph.D. PROGRAM IN MANAGEMENT SCIENCES

DEPARTMENT OF BUSINESS ADMINISTRATION

NANHUA UNIVERSITY

不適隨人體移動被展示之新產品的養價模式

PRICE CULTIVATION MODEL FOR THE NEW PRODUCT UNSUITABLE FOR MOVED TO BE DISPLAYED ALONG WITH ITS OWNER

指導教授：陳淼勝 博士

ADVISOR: MIAO-SHENG CHEN Ph.D.

指導教授：李謀監 博士

ADVISOR: MOU-JIAN LI Ph.D.

研 究 生：王憲斌

GRADUATE STUDENT: HSIEN-BIN WANG

中 華 民 國 1 0 6 年 1 月

南　華　大　學

企業管理學系管理科學博士班

博 士 學 位 論 文

不適隨人體移動被展示之新產品的養價模式

博士生：__王憲斌__ 王憲斌

經考試合格特此證明

口試委員：[illegible]

林明芳

張春桃

葉國忠

陳淼勝

指導教授：陳淼勝 李[illegible]

系主任(所長)：褚麗絹

口試日期：中華民國 105 年 12 月 21 日

準博士推薦函

本校企業管理學系管理科學博士班研究生 王憲斌 君在本系修業 3 年，已經完成本系博士班規定之修業課程及論文研究之訓練。

1、在修業課程方面： 王憲斌 君已修滿 36 學分，其中必修科目：最佳化理論、研究方法、書報討論等科目，成績及格(請查閱博士班歷年成績)。

2、在論文研究方面： 王憲斌 君在學期間已完成下列論文：

(1)博士論文：不適隨人體移動被展示之新產品的養價模式

(2)學術期刊：

序號	題目	期刊	發表年月	證明文件
1	The Optimal Pricing Model for Walk-in Potential Consumers with Extending Bass Diffusion Model	International Journal of Organizational Innovation (EI/INSPEC)	8(2), 125-133, 2016.01	附件一
2	Two-Period Pricing Model for Walk-in Potential Consumers with Normal Distribution of the Price of Their Willing to Buy	International Journal of Information and Management Sciences. (EI/COMPENDEX, TSSCI)	27(3), 283-298, 2016.09	附件二

本人認為 王憲斌 君已完成南華大學企業管理學系管理科學博士班之博士養成教育，符合訓練水準，並具備本校博士學位考試之申請資格，特向博士資格審查小組推薦其初稿，名稱： 不適隨人體移動被展示之新產品的養價模式 ，以參加博士論文口試。

指導教授：陳淼勝 李謀監 簽章

中華民國 105年 12月 1 日

誌謝

博士論文的完成，首先要感謝恩師 陳淼勝博士與 李謀監博士在求學期間諄諄地教導與鼓勵，支持並幫助我探索興趣的學術領域。在恩師悉心指引下，從觀念的啟發及對論文內容不厭其煩的審閱斧正，使本論文得以順利完成，師恩浩瀚，永銘心中。

在學期間，承蒙系上師長的指導，在發掘問題及邏輯思考上，提供諸多寶貴建議，使我在管理科學領域與研究方法上收穫頗多。師長們協助解決我的研究問題，啟發我拓展創意，指出我文章之錯誤，幫助我完成多篇論文，謹此致上誠摯的謝忱。

校內初審口試，承蒙系上師長釋知賢院長、陳券彪老師、袁淑芳老師和紀信光老師，提供諸多寶貴建議與指正，受益匪淺。在論文口試時，承蒙林進財博士、林明芳博士、張春桃博士與黃國忠博士不吝指正，經過他們嚴謹的審核，提供評論與建議，使本論文更臻完備，銘感五內。

求學期間，與同窗劉偉欽、林金鴻、吳立安與何嬿婷，學長黃武隆、吳尚哲、陳奕龍、賴榮祥、許崑峰、梁哲賓、黃金山與楊育哲，學弟許格嘉、蕭金源、陳寶元、曾琪雯與王紹平等，彼此相互扶持、勉勵，熱情地探索學問、分享生活，此酸甜的日子豐富了人生的旅程，祝福您們。事業

與學業的奮鬥，感謝同事林三立副校長、蔡長鈞院長、葉燉烟院長、張宏榮主任、沈健華教授、陳宗仁老師、葉明陽博士、林顯達老師等長官、好友的鼓勵與支持，庶務方面感謝陳雪琴小姐的協助。

57 歲才獲得學位，真是彌足珍貴，真要讚許自己的勇氣與毅力。同時要感謝我最親愛的家人,願將此論文獻給岳父林健雄,哥哥憲立、憲政、憲廷和憲欽，姊姊錦珠和錦芍，弟弟憲哲，太太惠英，兒子令成、育生和俊傑，謝智雄、林惠珠、林惠玲及所有親人，願與他們分享多年來辛苦的收穫。

憲斌 謹誌於斗六

南華大學企業管理學系管理科學博士班

105 學年度第 1 學期博士論文摘要

論文題目：不適隨人體移動被展示之新產品的養價模式

研 究 生：王憲斌　　　　　　　　　　指導教授：陳淼勝 博士

李謀監 博士

論文摘要

本文主要是針對某些不適合被穿戴或不適合隨人移動而被展示在大眾面前之新產品的養價問題進行研究與探討。這類型新產品包括不動產、遊樂園區、或大型傢具等皆屬之。將新產品的養價問題製作成可具體討論的養價模式，並尋求使得廠商利潤最大之模式最佳解性質為本研究主要內容。利用某時點潛在消費群人數估算當時產品成交訊息傳播擴散力量，並應用消費者願買價格上限分配機率密度函數估計潛在消費群人數購買比例和各時點單位時間內的銷售量，進而訂定各時點訂價以追求廠商折現總利潤最大化為目標。研究顯示養價模式之最佳解具有下列性質：性質 1：從養價時間區間給定且可針對兩時段訂定不同訂價水準之條件下，其最佳解性質發現第二時段訂價低於第一時段之訂價。因無限時段訂價模式可分割成許多連續相鄰的兩時段訂價模式，性質 1 等於證明廠商各時點最佳訂價控制應隨時間經過而遞減。性質 2：養價擴散模式討論廠商在折現利潤最大化考量下，是否應選擇養價擴散策略。即廠商是否應選擇一最恰當的養價時間長度 T^*，$T^* \neq 0$ 且 $T^* \neq \infty$，使得在養價時段 $[0,T^*)$ 具較高水準訂價，而在 $[T^*,\infty)$ 則具有較低的訂價水準；亦即 T^* 是否存在的問題。研究結果顯示：當廠商單位資金在單位時間內的成本（利率) r 大於成交價傳播影響消費者願買價格上限調整幅度 s 時，上述 T^* 必

存在。即當 $r > s$ 時，廠商在折現利潤最大化考量下，應採取養價擴散策略。此條件適用資金成本較高且較缺乏行銷資源以影響消費者願買價格上限調整幅度的中小型企業。反之，若 $r \leq s$，廠商應始終維持原單一最佳訂價，不必進行養價擴散策略即可使其折現利潤最大。此條件適用於資金成本較低且具有較多行銷資源以影響消費者願買價格上限調整幅度的之大型企業。

關鍵字：BASS 擴散模式、臨櫃潛在消費者、養價模式

Title of Thesis (Dissertation)：Price Cultivation Model for the New Product Unsuitable for Moved to be Displayed Along with its Owner
Department：Ph.D. Program in Management Sciences, Department of Business Administration, Nanhua University
Graduate Date：January, 2017 Degree Conferred：Ph.D.
Name of Student：Hsien-Bin Wang Advisors：Miao-Sheng Chen Ph.D.
Mou-Jian Li Ph.D.

Abstract

This study explored price cultivation issues mainly for new products which are not suitable for worn or moved to be displayed along with its owner in front of the public. This sort of new products includes real estate, amusement parks, or major furniture. This study made the issue into mathematical models to be discussed specifically and sought its optimal solution for the firm to optimize its discounted selling profits. To end this goal, the study estimated the sales volume of each time unit by using the number of walk-in potential consumers at a point in time to estimate the diffusion power of the product transaction information and by adopting the distribution density function of ceiling prices which consumers are willing to pay to estimate the purchase ratio among potential consumers, and then, set the appropriate pricing at a point in time to maximize the total discounted profits for manufacturers. The finding indicated that the optimal solution has the following properties. Property I: In two-period pricing model, under the condition of given price cultivation period and of price levels be differently priced, the pricing of the second period was found to be lower than that of the first period. Due to the infinite time period pricing model be divided into many consecutive adjacent two-period pricing model, Property 1 would imply the optimal pricing control of the firm at each point in time should decrease with time. Property 2: The price cultivation diffusion model would be discussed, under considering optimizing discounted profits for the firm, whether price cultivation diffusion strategy should be implemented or not. That is, whether or not the firm should choose the most appropriate price cultivation period T^*, $T^* \neq 0$ and $T^* \neq \infty$, in order to set higher price level in the period of $[0, T^*)$ and lower price level in the period of $[T^*, \infty)$. This is about whether T^* exists or not. As a result, when the cost of the firm's unit of capital in the unit time (the interest rate) r is greater than the adjustment of the ceiling price, s, that the consumer is willing to buy, the stated T^* must exist. That is, when $r > s$, under considering the optimal discounted profit, firms should adopt the price cultivation diffusion strategy. This condition could apply to small and medium-sized enterprises which usually have higher costs of capital and less marketing resources to influence the adjustment of the ceiling price which consumers are willing to buy. On the contrary, if $r \leq s$, the firm should always maintain the original single best price, not implement price cultivation diffusion strategy, in order to optimize their discounted profits. This condition suitable for large-scale enterprises which usually have lower costs of capital and more marketing resources to affect the adjustment of the ceiling price which consumers are willing to buy.

Keywords: BASS Model, Walk-in Potential Consumers, Price Cultivation Model

目錄

圖目錄

數學式編碼符號說明

本文各章節數學式之編排次序將用 3 個序號加小括號表達續。其中小括號內第 1 序號，表示該數學式所在位置之章數的編碼，附錄為 A；第 2 序號，表示該數學式所在位置之節數的編碼；第 3 序號，表示該數學式所在節數內出現先後的順序。其中章節及小節之間的關係是用「.」橫縱連結之，例如編碼(3.2.2)、(A.1.1)。

推論編碼說明

推論符號將採用 2 個序號表示。其中第 1 個序號表示該推論被展示內容的章數；第 2 個序號表示該推論位於該章推論之順序號，例如編碼【推論 4.1】。

符號說明

A: 廠商單位時間內之銷貨業務支出，本文假設廠商對新產品的廣告方式及單位時間的銷售業務支出（含廣告、租金、人力薪資）皆為給定值 A。對於廣告方式影響產品信息擴散情形將不在本文探討之中。

c: 廠商單位產品成本，其中 $c > 0$。

g: $g(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{\frac{-(z-\mu)^2}{2\sigma^2}}$ $z \in (-\infty, \infty)$，表示為於潛在消費群中，願買價格上限為 z 的機率密度函數，其中 g 為願買價格上限平均值 μ，變異數 σ^2 的常態分配。

G: $G(P) = \int_P^\infty g(z)dz$，即 $1 - G(P) = \int_{-\infty}^P g(z)dz$，為機率密度函數 g 在 P 點的累積分配值。

N: 市場潛在消費（群)人數。

P_0: 第 1 時段 $[0, T)$ 的訂價水準，其中 $P_0 \geq c$。

P_T: 第 2 時段 $[T, \bar{T})$ 的訂價水準，其中 $P_T \geq c$。即在時間區間 $[T, \bar{T})$ 內，其訂價水準皆為 P_T。

r: 為廠商之單位資金在單位時間區間的成本，為單位資金經單位時間複利連鎖後的資金。亦即為現金流量之折現率，廠商的資金成本（Cost of Capital）。本論文假設 r 為參數。

s 表示成交價之傳播影響未購貨消費者願買價格上限在單位時間內調整的幅度。為單位內心參考價與市場成交價之差，經單位時間連鎖調整

幅度。本論文假設 s 為參數。

T: 維持訂價水準為 P_0 之時間區間長度。

x_t：為 t 時點之產品累積銷售量。

$x_t' = (\alpha + \beta x_t)(N - x_t), \forall t \in [0, \infty)$ 為 Bass 擴散模式之擴散微分方程式原式。α 表示具創新消費屬性之消費者占全體消費者之比例值，$\alpha \geq 0$。β 表示具模仿消費屬性之消費者占全體消費者之比例值，$\beta \geq 0$。本論文假設 α、β 均為參數。

y_t：為 t 時前（累積）臨櫃消費群數。所謂 t 時前臨櫃消費者就是：某一潛在消費者在 t 時前的某時間點，對其在意的產品功能自以為已充分了解，只剩價格因素，就可以決定是否購買之民眾。

$y_t' = (\alpha + \beta y_t)(N - y_t), \forall\ t \in [0, \infty)$，為擴充 Bass 擴散模式之擴散微分方程式。

z^+：若 $z \geq 0, z^+ = z$；若 $z < 0, z^+ = 0$。

第一章 緒論

如何養價之問題為已存在於市場的銷售實務問題。長久以來一直流傳著如下的故事：某商家想要開設店鋪販賣商品（例如棉被)。商家會在其店鋪左右分別各開設一家販賣相同產品的店鋪。然其左右店鋪卻皆將相同的商品訂定較高價位。當消費者要貨比三家時，發現中間這一家店鋪的產品較便宜，於是消費者就果斷的購買中間店鋪的商品。此左右兩家店鋪僅止於進行養價之功能，並未寄望於營業額或利潤之創造。另一種情境為商家推出新產品時，將該產品訂定超出潛在消費者預期的高價，以至於僅吸引潛在消費者的圍觀與注視，卻無實際的成紀錄。於經過一段時間之後，商家採取降價促銷活動（如週年慶等促銷活動)，以引起潛在消費者採取購買行動。該事件促銷甚至導致該新產品瞬間銷售殆盡（俗稱秒殺現象)，廠商亦達成銷售目標。因此養價在學術研究上或可成為值得進一步探討的議題。

1.1 研究背景

市場上流通各式各樣的產品。有的產品（如手機、衣服等）很容易被消費者持有、配戴、穿著而展示在他人的眼前，可隨處以產品本身吸引潛在消費者注意或購買，而達到產品信息在市場上擴散的目的。此類產品的銷售量越多，其產品信息就越有機會隨消費者四處擴散。

也有一些產品（如不動產、遊樂設施、大型家俱等）不易或不適合被消費者持有、配戴、穿著而隨消費者移動被展示在他人眼前。此類產品本身不易隨消費者移動而被潛在消費者經由現場實地檢視而達到吸引其注意或購買的目的。這些產品信息的擴散主要依賴於口碑相傳。雖然目前廠

商可以透過各類多媒體與管道來宣傳其產品信息，此亦僅歸類為另一形式的口碑相傳。

高價產品，雖不像經濟學上或法律上所定義的奢侈品，消費者常以擁有該產品作為其滿足特殊慾望，如地位、身分、財富、名望和自我形象等。高價產品新上市時的價格訂定常以聲望訂價法來訂定之。至於價格要訂多高，才能滿足消費者特殊慾望，又能達成行銷者所期望的利潤極大之目標？本研究嘗試提出這類不易或不適合被消費者持有、配戴、穿著而隨消費者移動以展示在他人眼前的較高價產品之養價模式（Price Cultivation Model），藉由促銷訂價與養價期間的最佳化，以達成新產品上市利潤極大化的目標。在回顧文獻後，有關養價問題的研究似乎不可得。然而，在實務上，採用養價模式作為高價產品新上市的行銷策略似乎不陌生。豪宅或在專賣店內所陳列的高價商品，常常未見成交量，但卻吸引許多青睞的眼光圍觀注意。在電子商務世界中，也不乏高價產品的展示。廠商初期不積極尋求買賣成交，其目的在藉由網路管道，建立其產品高價位的形象（價格錨定，Price Anchoring），寄望在其他市場管道藉由促銷活動而達成大量銷售的目的。

1.2 研究目的

Bass 擴散模式 (1968) 以累積銷售量 x_t 作為 t 時點的擴散力量來源。對某些如豪宅、大型傢俱等不易移動的產品而言，由於產品無法被消費者配戴在身上，實體產品將無法隨消費者移動，而被他人透過眼識接收訊息而達到擴散的效果。亦即它的擴散力量必含有消費者口耳相傳的成份。增加擴散力量來源的假設，將使 Bass 擴散模式更具實用價值。

本論文溶入了本文作者與指導教授所共同發表的論文而成為此博士論文。這些論文共二篇。本文第三章兩時段訂價模式是單一時段訂價模式(Chen, Li, & Wang, 2016)和兩時段訂價模式(Wang, Chen, & Li, 2016)所組成的。兩時段訂價模式主要討論臨櫃潛在消費群的擴散力量來源對產品成交價信息擴散的影響。產品成交價信息的擴散會隨時間經過而影響產品銷售數量。第四章為養價擴散模式，除採用上述之擴散力量來源之，外，亦將成交價格信息如何影響消費者願買價格上限的調整幅度納入討論。因此兩時段訂價模式為養價擴散模式之特例。此二章皆為討論養價問題的模式，他們是針對不同的假設條件分別將養價問題製作成可具體討論的數學模式。本論文研究目的至少有下列四項：

1. 探討可在兩時段分別訂價之養價問題在各時段最佳訂價水準性質。
2. 應用上述研究成果，探討將兩時段訂價問題擴充成為無限時段訂價問題而得知：新產品上市後，其最佳訂（售）價水準必為時間減函數。即任一時點之最佳訂價可能隨時間經過維持不動，但絕不會隨時間經過而嚴格增加。
3. 探討在何種條件下養價擴散模式存在最佳養價期間。所謂最佳養價期間就是存在某一時點使得最佳訂價在該時點後維持常數。
4. 討論養價模式中各變數在實務管理的應用。

1.3 研究架構

本文是以推出新產品的廠商的立場來探討高價產品的養價策略。其內容共分成五章，分述如下：

第一章為緒論。本章綜論本文的研究背景、研究限制與研究架構等。

第二章為文獻探討。本章蒐集並彙整諸學者對高價產品特性、聲望訂價、內部參考價格與價格資訊擴散理論，作為研擬養價模式的參考。

第三章為兩時段最佳訂價模式。本章在期間給定的情境下，探討可在兩時段分別訂定訂價之最佳訂價策略性質及其管理意涵。

第四章為養價擴散模式。本章在訂價給定的情境下，探討是否存在最佳養價期間，若存在則它具有那些特性與其管理意涵如何。

第五章為結論。本章綜合討論本論文各章內容，並展示各章研究成果。

本論文研究架構如圖 1.1 所示。

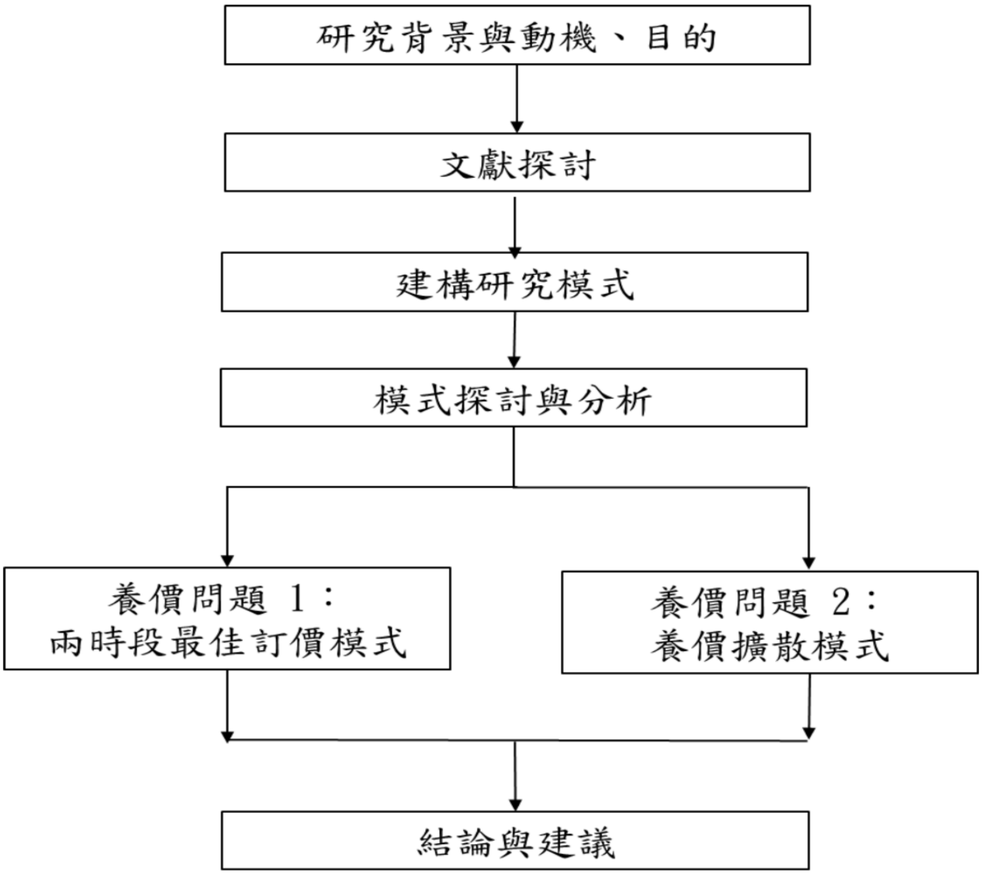

圖1.1 本論文研究架構圖

資料來源：本研究整理

第二章 文獻探討

本章文獻回顧主要討論高價產品的特性、聲望訂價、保留價格等訂價相關理論與議題。並彙整 Bass 新產品價格訊息傳播擴散相關理論與議題以作為發展本文之養價擴散模式的理論基礎。

2.1 高價產品的特性

高價產品亦如奢侈品品牌具有富貴象徵、品質上乘、個性化、專一化、距離感等特性。典型的奢侈品類別涵蓋服裝 (Zheng, Shen, Chow, & Chiu, 2013)、眼鏡、名錶、珠寶、皮具、化妝品、香水、汽車、豪華遊輪 (Hwanga, 2014)、豪宅、高爾夫球具、名酒等商品類別，各類皆有代表性的品牌。奢侈產品在過去三十年間引領全球經濟繁榮對全球化產生重要的影響 (Samli, 2013)。奢侈品以採用心理訂價策略（Psychological Pricing）為主。如果希望商品可以順利賣出，訂價必須讓客戶於購買時認同此商品的價值。所以市場上一些強勢品牌可以用較高的價格銷售他們的高級產品。因為消費者認同高級品牌的價值，所以市場會支撐它的價格，並讓消費者願意掏腰包購買。然而高價產品、奢侈品行銷在實務上也面臨兩難困境，即品牌稀少性的維持和產品擴散的矛盾 (Wetlaufer, 2001; Catry, 2003; Radon, 2012)。

2.2 聲望訂價

聲望訂價（Prestige Pricing），屬於心理訂價策略之一，是一種有意識地給商品訂定高昂價格以提高商品地位的訂價方法。品牌定位（Brand Positioning）連結聲望訂價法將在消費者心中強化其正向的品牌印象，甚

至為獨家的優越品牌印象 (Groth & McDaniel, 1993)。為了提高潛在消費者的認知價值，有些名牌商品或著名企業，故意把價格定成高價，以限制潛在的買主，並創造一種高品質的印象。聲望訂價可以滿足某些消費者的特殊慾望，如地位、身分、財富、名望和自我形象等，還可以通過高價格顯示名貴優質。品質不易鑒別的商品最適合採用此法，因為消費者有崇尚名牌的心理，常以價格來判斷其品質之良窳。聲望訂價法又被稱作形象訂價法，透過建立消費者在感觀上所認知的是奢侈品、高品質或是聲譽佳的產品，讓消費者願意支付較高價格。相對於拉抬短期銷售，這是一個長遠的戰術。

2.3 保留價格

Krishna (1991)、Homburg, Koschate, 與 Hoyer (2005) 和 Monroe (2003) 對保留價格（Reservation Price）定義為當消費者對產品產生需求時，在目前所擁有的產品資訊下對產品做評價，而形成對此產品所願意支付的最高金額，它是消費者利用產品資訊及使用經驗來評估產品的效用，以貨幣單位表示其價值。保留價格是消費者的最高的內在參考價格（Internal Reference Price）。Biswas 與 Blair (1991) 認為參考價格是指當消費者接收到產品信息時所聯想到的任何價格。消費者之購買行為常會受到其內在參考價水準高低的影響而改變 (Chen & Chen, 1998a; 1998b)。內在參考價可協助行銷者進一步掌握消費者對價格訊息的處理過程。Jacobson 與 Obermiller (1990)、Lichtenstein, Burton, 與 Karson (1991)、Putler (1992)、Rajendran 與 Tellis (1994)、Winner (1986) 和 Chen 與 Chen (1998a; 1998b) 等學者皆提出這樣的支持論點。參考價格模型亦可明確納入跨期效應之訂價決策 (Massowa & Hassinib, 2013)。消費者透過

個人心中所衡量之利得或損失，來表達使用產品之效用。此效用值與產品實際售價及其內心保留價格的差距有密切關係。個別的消費者對新產品會形成不同的保留價格。消費者心中的保留價格會影響其購買行為(Monroe, 2003; Kamins, Dreze, & Folkes, 2004)。

廠商訂價改變之信息傳播會影響消費者內在參考價之調整，並進一步影響消費者之購買量與需求函數之變化 (Chen & Chen, 1998a; 1998b; 2003)。凡行銷者皆欲了解消費者是如何處理價格訊息的問題。Engel, Blackwell, 與 Miniard (1993) 定義消費者行為：消費者在取得、消費與處置產品或服務時，所涉及的各項活動。這些活動包括啟動消費行為的動機及心理因素，消費者經由所蒐集的產品訊息衍生對於產品的認知，進而對產品進行評估，由評估形成態度及對產品的信心，進而影響對產品的購買意願，導致了的購買結果，並產生回饋的舉動。這些活動過程稱為「消費者行為決策過程」。因為個別消費者均有各自的特性，行銷者無法直接掌握消費者對價格訊息的處理過程。

廠商或行銷者或可以藉由下列方式間接地影響消費者之內在參考價的形成：(1) 經由操縱各種產品的價格組合；(2) 針對消費者操作折扣策略；(3) 應用利得/損失機制，影響消費者對於價格的合理性認知，因部分消費者會依過去的經驗，以判斷現在的價格是否對自己有利得。(4) 以短期或長期利潤的觀點所擬定的生產或行銷策略 (Liu, 2007)。藉由這些方法可協助行銷者規劃銷售的有利環境。或許一年的銷售量可以集中於一、二個月就可達成銷售目標。實證研究顯示只有 9% 的消費者遵循沒有參考價格型態的原則進行消費活動 (Moon, Russell, & Duvvuri, 2006)。從消費者的參考價的模型裡可以看出，消費者的購買決策亦是基於心理

學所建構的。

2.4 新產品價格訊息傳播擴散

Mahajan, Muller, 與 Bass (1990) 運用溝通理論在行銷管理領域，延續學者對新產品推廣與擴散議題的廣泛研究 (King, 1963; Frank, Massy, & Morrison, 1964; Silk, 1966; Arndt, 1967; Bass, 1969)。其中學者 Bass (1969; 2004) 觀察新產品使用的擴散情況而提出首次購買新產品時程的成長模式。該模式假設新產品上市後，其會類似疾病傳染般地在市場上擴散。

Bass 擴散模式（Bass Diffusion Model）能廣為管理學者所應用，主要是因為其利用新產品實際銷售的時間序列資料發覺了某些新產品的銷售規則來進行銷售趨勢預測，並利用這個銷售趨勢做未來產銷資源分配的參考 (Mahajan & Wind, 1986; Kalish & Lilien, 1986)。由於應用 Bass 擴散模式來描述新產品的擴散過程，能製作成可具體討論的數學模式，因而引起許多學者對此理論的擴充或提出理論的實證研究。有關 Bass 擴散模式之擴充或實證之學術研究，其主要探討內容大致上可分為五大面向：（1）廣告影響面向 (Teng & Thompson, 1983; Kalish, 1983; Thompson & Teng, 1984)；（2）銷售競爭者影響面向 (Horsky & Simon, 1983; Parker & Gatignon, 1994; Kim, Bridges, & Srivastava, 1999)；（3）新產品與市場性質影響面向 (Rogers, 1995; Kalish & Lilien, 1986)；（4）價格影響市場潛在消費者人數面向 (Robinson & Lakhani, 1975; Bass, 1980; Dolan & Jeuland, 1981; Bass & Bultez, 1982; Kalish, 1983;1985; Horsky, 1990; Shih, 2008; Chen, Li, & Wang, 2016; Wang, Chen, & Li, 2016)；（5）價格影響擴散速率面向 (Kamakura & Balasubramanian, 1988; Jain & Rao, 1990; Shih, 2008; Chen, Li, & Wang, 2016; Wang, Chen, & Li, 2016) 等。其中面向（4）和（5）

「價格影響市場潛在消費者人數」與「價格影響擴散速率」為本研究的重要理論參考依據。

價格訊息擴散會影響消費者對於產品價值評估的水準。學者 Valente (1995) 指出新產品擴散是一個溝通的過程，讓已使用產品的消費者說服尚未使用的消費者使用。行銷者決定產品價格水準時，往往考慮藉由改變成交價格來影響消費者的內心參考價格的水準，使得消費者對於產品做出購買決策。每一潛在消費者可能會受到市場成交價格的直接影響，同時也可能會受到市場歷史成交價訊息傳遞的間接影響 (Lu, 2012)。消費者購買新產品的過程包括知曉、願意購買、產品的效用等階段 (Gatignon & Robertson, 1991)。因此產品能為消費者所知曉乃是消費者購買產品的首要條件，且消費者對於產品的評價（保留價格）高於產品訂價時消費者才願意購買。因此，藉由行銷者的行銷資源投入與使用者的口耳相傳，使得產品資訊在市場上可以不斷地擴散出去。產品在市場上擴散速度的快慢，將會影響消費者對產品功能的認知水準。消費者認知水準的差異，會對產品產生不同的評價，進而影響消費者的購買行為。在使用相同的行銷資源上，行銷者投入愈多，其產品資訊擴散速率亦將愈快。而消費者獲取產品資訊的差異，亦使得消費者對同一種產品亦有不同的評價。此可謂是這是經濟學者認為消費者之需求機率密度函數可區別不同消費者具不同價格認知水準的主要原因 (Lee & Wong, 2005)。部份學者曾提出價格會影響購買比率而不會影響市場潛在消費者人數 (Robinson & Lakhani, 1975; Bass, 1980; Dolan & Jeuland, 1981)，亦有學者指出價格會影響新產品的擴散率而不是市場潛在消費者人數 (Kamakura & Balasubramanian, 1988; Jain & Rao, 1990)。Shih (2008) 提出一個觀念架構，以新產品擴散模式及需求理論為基礎，建立新產品的需求機率密度函數。透過此需求函數的表達，及

新產品資訊隨時間擴散之微分方程式，利用需求函數與 Bass 擴散模型 (Bass, 1969) 來建立新產品的最佳訂價模式。

知曉新產品資訊的潛在消費者，未必全數購買新產品。學者的研究亦假設價格會影響模仿者之購買與市場潛在消費者人數，而對創新者卻無顯著的影響。然而價格不會影響創新者購買意願的假設，顯然與個體經濟學中需求函數的假設不同。利用 Bass 擴散模式來做新產品銷售趨勢的預測，在同一價格下，以市場潛在消費者人數 N 扣除實際購買者 $x(t)$，來做模式參數 α、β、N（請參閱 3.2 節符號定義，以下同）的估計，會高估模式參數 α 之數值、低估模式參數 β、N 之數值。Shih (2008) 認為在時點 t 市場潛在消費者人數的估計應以 $N-y(t)$ 來替代 $N-x(t)$，其中 $y(t)$ 為累積知曉新產品資訊與屬性的人數或稱為潛在臨櫃人數。以累積臨櫃人數 $y(t)$ 來替代累積購買人數 $x(t)$ 亦為 Bass 擴散模式擴充或修正之重要且可行方向之一。

第三章 兩時段訂價模式

本章兩時段訂價問題乃屬養價問題之一。養價擴散模式的微分方程式在最佳化求解過程中具複雜性。完整的養價擴散模式有三個決策變數：上市時訂價水準 P_0（符號定義請參照 3.2 節，以下同）、養價時間長度 T、與促銷訂價 P_T，其最佳解可以表示為 P_0^*、T^*、P_T^*。此完整的養價問題應同時將此三個決策變數值決定，問題才完整的被解決。

本文之模式（包含第三章和第四章）將養價折現總利潤作為模式目標函數，現將追求目標函數最大之最佳解過程分為下列兩種情況來討論之。情況一是：在給定養價期間 T 的情境下，尋求折現總利潤最大化之兩時段最佳訂價水準 P_0^* 及 P_T^*，稱為「養價期間給訂追求兩時段最佳訂價情況」，此為第三章所討論之內容。情況二是：在給定訂價 P_0 與 P_T 的情境下，尋求最佳養價期間 T^*，稱為「訂價給訂追求最佳養價期間情況」，此為第四章所討論之內容。

本章將以前述情況一「養價期間給訂追求兩時段最佳訂價情況」之問題背景來討論養價模式最佳解特性及其管理意涵。於情況一中，單一時段訂價策略 (Chen, Li, & Wang, 2016) 為兩時段訂價策略 (Wang, Chen, & Li, 2016) 的特例。於擴充 Bass 擴散模式中，以「臨櫃潛在消費群人數」與「售價水準」等雙重擴散力量來源。兩時段訂價模式主要討論臨櫃潛在消費群的擴散力量來源對產品成交價信息擴散的影響。單一時段訂價模式為兩時段訂價模式的特例。

3.1 模式背景

本章主要內容引用 Chen, Li, 與 Wang (2016) 和 Wang, Chen, 與 Li (2016) 有關單一時段及兩時段之訂價模式最佳解成果。此最佳化模式要建構的目的是用來解釋最佳化促銷訂價策略如何形成，以作為某種養價問題的適用場合。它適用於那些因不易移動或穿戴而使得產品本身不易隨人體移動被展示在大眾眼前的產品，諸如不動產、遊樂園區、和大型傢俱等皆屬之。本章採用廣義的 Bass 擴散模式，將其單一擴散力量來源之「銷售量」，擴充成雙重擴散力量來源之「臨櫃潛在消費群人數」與「售價水準」等兩股力量。在給定的兩時段 $[0, T)$ 與 $[T, \bar{T})$ 之內，其中 $T < \bar{T}$ 且 $\bar{T}$ 可能趨向無限大，廠商欲分別決定該兩時段之訂價，分別為 P_0 與 P_T，以使得其在整個時間區間 $[0, \bar{T})$ 之折現利潤最大。本研究對各時段追求最佳解 (P_0^*, P_T^*) 的過程作充分地展示與討論。前述兩時段模式的展示與討論可擴展成為無窮時段的最佳訂價模式，而成為一般化的價格控制模式問題。本研究發現前述價格控制模式最佳解具有下列特徵：新產品上市後，其最佳訂價水準隨時間增加而遞減。

3.2 假設條件與符號

本文需要下列假設條件與符號來說明本章的問題背景。假設某新產品在時間 $t = 0$ 上市，此新產品廠商所面對之市場的潛在消費數為 N。所謂潛在消費者數就是當售價降至 0 時，廠商有能力且有機會售出的產品量。為使消費者人數等於此消費者人數所對應的產品消費量，本文假設消費量為 n 的 1 位消費者，將被視為消費量為 1 的 n 位消費者。本文並以符號 $g(z)$ 表示為於潛在消費群中，願買價格上限為 z 的機率密度

函數，其中 g 為願買價格上限平均值 μ，變異數 σ^2 的常態分配。即

$$g:\quad g(z)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{\frac{-(z-\mu)^2}{2\sigma^2}}\qquad z\in(-\infty,\infty) \tag{3.2.1}$$

其中 z 值可以為負，它表示售價降至 0 時，仍有某些消費者不願擁有該產品。

G: $G(P)=\int_P^{\infty}g(z)dz$，即 $1-G(P)=\int_{-\infty}^{P}g(z)dz$，為機率密度函數 g

在 P 點的累積分配值。其中$\frac{d}{dP}G(P)=-g(P)\ \forall P$。

N: 市場潛在消費（群）人數。

c: 廠商單位產品成本，其中 $c>0$。

P_0: 第 1 時段 $[0,T)$ 的訂價水準，其中 $P_0\geq c$。

T: 維持訂價水準為 P_0 之時間區間長度。

P_T: 第 2 時段 $t\in[T,\bar{T})$ 的訂價水準，其中 $P_T\geq c$。即在時間區間 $[T,\bar{T})$ 內，訂價水準皆為 P_T。

r: 現金流量之折現率，廠商的資金成本。

s 表示成交價之傳播影響未購貨消費者願買價格上限在單位時間內調整的幅度。為單位內心參考價與市場成交價之差，經單位時間連鎖調整幅度 (Chen & Chen, 1998)。本論文假設 s 為參數。

A: 廠商單位時間內之銷貨業務支出，本文假設廠商對新產品的廣告方式及單位時間的銷售業務支出（含廣告、租金、人力薪資）皆為給定值 A。對於廣告方式影響產品信息擴散情形將不在本文探討之中。

y_t：或表示為$y(t)$，表 t 時前（累積）臨櫃消費群人數。所謂 t 時前臨櫃消費者就是：某一潛在消費者在 t 時前的某時間點，對其在意的產品功能自以為已充分了解，只剩價格因素，就可以決定是否購買之民眾。其中

{ t 時前臨櫃消費群} = { t 時前臨櫃已購買之消費群} ∪ { t 時前臨櫃尚未購買之消費群} (3.2.2)

本模式假設：任一時點 t，皆有一力量吸引尚未成為臨櫃消費者（其數為 $N - y_t$）成為新產品的臨櫃消費者（其增加率為 y_t'），且此力量強度為 t 時點前臨櫃消費群 y_t 的線性函數，即 y_t 滿足下列微分方程式：

$$y_t' = (\alpha + \beta y_t)(N - y_t) \quad \forall\ t \in [0, \infty) \tag{3.2.3}$$

其中 $\alpha \geq 0$，$\beta \geq 0$，在 Bass 擴散模式中分別用來表示具創新消費屬性與具模仿消費屬性之消費者占全體消費者之比例值。實證的結果發現參數 α 的平均估計值為 $\alpha = 0.03$； β 的平均估計值為 $\beta = 0.38$ (Sultan, Farley, & Lehmann, 1990; 1996)，故大多是屬於 $\alpha \leq \beta N$。本研究假設 α 、β 為給定的，不予於討論。

z^+：若 $z \geq 0$，$z^+ = z$；若 $z < 0$，$z^+ = 0$。

(3.2.3) 式是採用修正 Bass 之新產品擴散模式 (Shih, 2008; Chen, Li, & Wang, 2016; Wang, Chen, & Li, 2016) 而得。Bass 擴散模式之擴散微分方程式原式為：

$$x_t' = (\alpha + \beta x_t)(N - x_t) \qquad \forall t \in [0, \infty) \tag{3.2.4}$$

其中 x_t 為 t 時點之產品累積銷售量。即 Bass 擴散模式以累積銷售量 x_t 作為 t 時點銷售量的擴散力量來源。而本情境以臨櫃消費量 y_t 作為 t 時點之臨櫃消費者的擴散力量來源。對某些如豪宅、傢俱等不易移動的產品而言，由於產品無法被消費者配戴，因此產品信息將無法隨消費者移動，而被他人透過眼識接收訊息而達到擴散的效果。亦即它的擴散力量必含有臨櫃消費者口耳相傳的成份。由於潛在消費者要成為已消費之消費者前，必須先演變成為臨櫃消費者，參見 (3.2.2) 式可得 $y_t \geq x_t$,$\forall t$。故以 y_t 作為產品訊息擴散力量來源之二階段方式來論述擴散（潛在消費者是演變成臨櫃消費者，再演變成已消費之消費者 (3.2.3)）似乎較一階段方式論述擴散（潛在消費者直接演變成已消費之消費者 (3.2.4)）來得精緻、完整。因為計畫剛啟動時（即新產品剛上市發表），令累積臨櫃人數為 0（即 $y_0 = 0$），故由 (3.2.3) 式可得

$$-1 = \frac{y_t'}{(\alpha+\beta y_t)(N-y_t)} = \frac{1}{\alpha+\beta N}\left[\frac{y_t'}{y_t-N} - \frac{y_t'}{y_t+\frac{\alpha}{\beta}}\right]$$

將左式對 t 積分，得

$$y(t) = N - \frac{(\alpha+\beta N)N}{\alpha e^{(\alpha+\beta N)\mathrm{t}}+\beta N} + y_0 = N\frac{\alpha e^{(\alpha+\beta N)\mathrm{t}}-\alpha}{\alpha e^{(\alpha+\beta N)\mathrm{t}}+\beta N} + y_0 \quad t \in [0, \infty) \tag{3.2.5}$$

上式 (3.2.5) 可估計 t 時前（累積）臨櫃消費群數。

3.3 建構兩時段訂價模式

給定 T 值，若廠商欲在時段 $[0,T)$ 內決定訂價水準 P_0，及在時段 $[T,\bar{T})$ 內決定訂價水準 P_T，使得其折現利潤 $\pi(P_0,P_T)$ 最大，其一般化之數學模式建構如下：

$$\max_{(P_0,\ P_T)} \pi(P_0,P_T)$$

$$= (P_0-c)\ \ G(P_0)\left[\int_0^T e^{-rt}y_t'dt+y_0\right]+$$

$$e^{-rT}\ \ (P_T-c)y_T[G(P_T)-G(P_0)]\frac{(P_0-P_T)^+}{P_0-P_T}+$$

$$(P_T-c)G(P_T)\int_T^{\bar{T}} e^{-rt}y_t'dt-\int_0^{\bar{T}} e^{-rt}A\ \ dt \tag{3.3.1}$$

其中 $P_0\geq c$，$P_T\geq c$ 且當 $P_0=P_T$ 時，$[G(P_T)-G(P_0)]\frac{(P_0-P_T)^+}{P_0-P_T}$ 值，將被定義為 0。

(3.3.1) 的第 1、2 和 3 項分別為廠商在時段 $[0,T)$ 內、T 時點、$[T,\bar{T})$ 內之折現利潤。第 2 項不可忽略（不為 0 ）的必要條件為 $P_T<P_0$，概因它代表在 $[0,T)$ 時段內之臨櫃消費群（其數量為 y_T-y_0）認為訂價水準 P_0 太高，而在低價 P_T 才進入市場消費。從 (3.2.1) 得知：$P_T<P_0$ 成立之充要條件為 $G(P_T)>G(P_0)$。

3.4 模式最佳解的必要條件

令符號 (P_0^*, P_T^*) 為 (3.3.1) 的最佳解。考慮 (3.3.1) 的目標函數，對 P_0 與 P_T 的偏微分可得：當 $P_0 \neq P_T$ 時，恆有：

$$\frac{\partial \pi(P_0,\ P_T)}{\partial P_0} = [G(P_0) - (P_0 - c)g(P_0)][\int_0^T e^{-rt} y_t' \, dt + y_0] +$$

$$e^{-rt}(P_T - c)y_T g(P_0)\frac{(P_0 - P_T)^+}{P_0 - P_T} \tag{3.4.1}$$

$$\frac{\partial \pi(P_0,\ P_T)}{\partial P_T} = e^{-rT} y_T [G(P_T) - G(P_0) - (P_T - c)g(P_T)]\frac{(P_0 - P_T)^+}{P_0 - P_T} +$$

$$[G(P_T) - (P_T - c)g(P_T)]\int_T^{\bar{T}} e^{-rt} y_t' \, dt$$

$$= e^{-rT} y_T G(P_0) + [G(P_T) - (P_T - c)g(P_T)][\int_T^{\bar{T}} e^{-rt} y_t' \, dt +$$

$$e^{-rT} y_T \frac{(P_0 - P_T)^+}{P_0 - P_T}] \tag{3.4.2}$$

在 (3.3.1) 式中，若限制時段 $[0, T)$ 之訂價 P_0 與時段 $[T, \bar{T})$ 之訂價 P_T 必須相等，$P_0 = P_T = P$；則原兩時段最佳訂價問題等同單時段 $[0, \bar{T})$ (Chen, Li, & Wang, 2016) 之最佳訂價問題。此時，其最佳訂價 $\bar{P}$ 為下列問題最佳解 $\pi(\bar{P}, \bar{P}) = \max_P \pi(P, P)$。如圖 3.1 所示，上述問題最佳解 $\bar{P}$ 等於使函數 $f(P) = (P - c)G(P)$ 值為最大的 P 值。

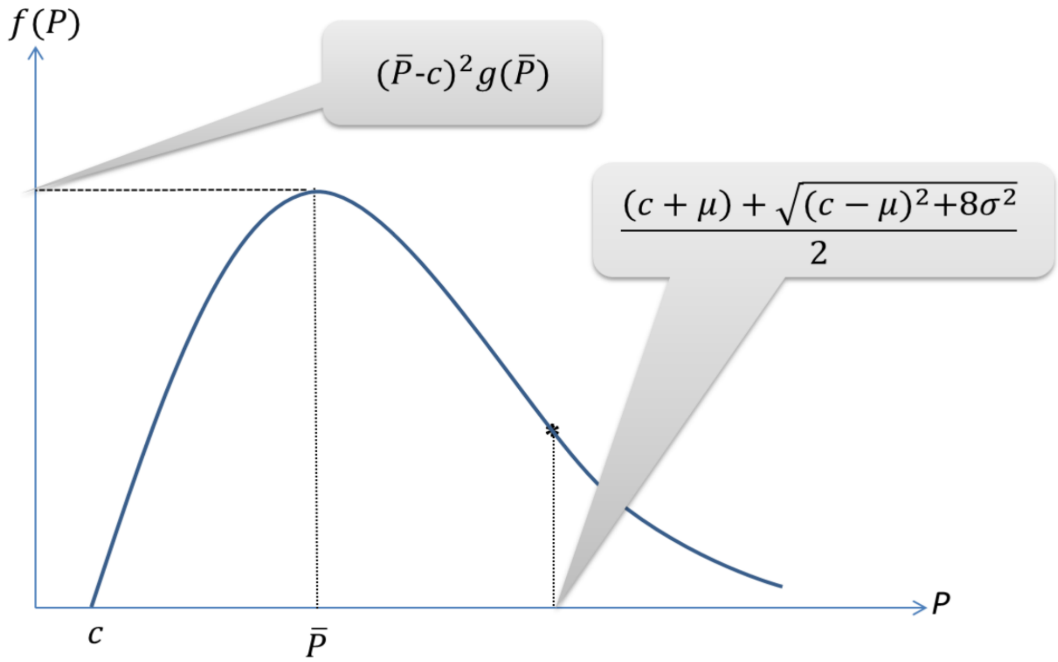

圖3.1 函數 $f(P)=(P-c)G(P)$ 與 P 之圖形

資料來源：本研究整理

利用 (3.3.1) 所得之 $\pi(P,P)$ 定義，可得

$$\pi(\bar{P},\bar{P}) = \max_{P} \ \pi(P,P)$$

$$= \max_{P} \ [(P-c)G(P)(\int_0^{\bar{T}} e^{-rt} y_t' \ dt + y_0) - \int_0^{\bar{T}} e^{-rt} A \ dt]$$

因此函數 $f(P)=(P-c)G(P)$ 在 $\bar{P}$ 點有最大值（參見圖 3.1）。

接下來討論函數 $f(P)=(P-c)G(P)$ 的性質如下：利用 $g(P)$ 為常態分配性質可得：

1. $\lim_{P \to c^+} (P-c)G(P) = 0$

2. $\lim_{P \to \infty} (P-c)G(P) = \lim_{P \to \infty} \frac{G(P)}{\frac{1}{P-c}}$

$$= \lim_{P \to \infty} \frac{g(P)}{\frac{1}{(P-c)^2}} = \lim_{P \to \infty} (P-c)^2 \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{\frac{-(P-\mu)^2}{2\sigma^2}} = 0 \tag{3.4.3}$$

3. $0 = \frac{d}{dP}[(P-c)G(P)]_{P=\bar{P}} = [G(P) - (P-c)g(P)]_{P=\bar{P}}$

$$= G(\bar{P}) - (\bar{P} - c)g(\bar{P}) \tag{3.4.4}$$

$$\frac{d^2}{dP^2}[(P-c)G(P)] = -2g(P) - (P-c)g'(P)$$

$$= \frac{-2}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{\frac{-(P-\mu)^2}{2\sigma^2}} + \frac{(P-c)}{\sqrt{2\pi}\sigma} \frac{(P-\mu)}{\sigma^2} e^{\frac{-(P-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{\frac{-(P-\mu)^2}{2\sigma^2}} \left[\frac{(P-c)(P-\mu)}{\sigma^2} - 2 \right]$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma^3} e^{\frac{-(P-\mu)^2}{2\sigma^2}} [\, P^2 - (c+\mu)P + c\mu - 2\sigma^2]$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma^3} e^{\frac{-(P-\mu)^2}{2\sigma^2}} \left[P - \frac{(c+\mu) + \sqrt{(c-\mu)^2 + 8\sigma^2}}{2} \right] \times$$

$$\left[P - \frac{(c+\mu) - \sqrt{(c-\mu)^2 + 8\sigma^2}}{2} \right] \tag{3.4.5}$$

其中

$$\frac{(c+\mu)-\sqrt{(c-\mu)^2+8\sigma^2}}{2}<\frac{(c+\mu)-\sqrt{(c-\mu)^2}}{2}$$

且

$$\frac{(c+\mu)+\sqrt{(c-\mu)^2+8\sigma^2}}{2}>\frac{(c+\mu)+\sqrt{(c-\mu)^2}}{2} \tag{3.4.6}$$

從 (3.4.3)、(3.4.5)、(3.4.6) 式可得函數 $f(P)=(P-c)G(P)$ 的圖形，如圖 3.1 所示。

【推論 3.1】

1. 函數 $f(P)=(P-c)G(P)$ 有唯一極大點 $\bar{P}$，無極小點，且恰有一反曲點 $\frac{(c+\mu)+\sqrt{(c-\mu)^2+8\sigma^2}}{2}$，如圖 3.1 所示。

2. $\mu<\bar{P}$ 之充要條件為 $\sigma\sqrt{\frac{\pi}{2}}>\mu-c$。

證明：

1. 利用 (3.4.5) 式即可得證。

2. 利用圖 3.1 可得

$\mu < \bar{P}$ 之充要條件為

$$0 < \frac{d[(P-c)G(P)]}{dP}\Big|_{P=\mu} = G(\mu) - (\mu - c)g(\mu) = \frac{1}{2} - (\mu - c)\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}$$

故得證。

【推論 3.2】

若 (3.3.1) 式的最佳解 (P_0^*, P_T^*) 滿足 $P_0^* = P_T^*$，則 $P_0^* = P_T^* = \bar{P}$，其中 $\bar{P}$ 如圖 3.1 所示之點。

【推論 3.3】

1. 假設 (3.3.1) 之最佳解 (P_0^*, P_T^*) 滿足 $P_0^* \neq P_T^*$，則

$$\frac{\partial \pi(P_0, P_T)}{\partial P_0}\Big|_{(P_0^*, P_T^*)} = 0 \tag{3.4.7}$$

$$\frac{\partial \pi(P_0, P_T)}{\partial P_T}\Big|_{(P_0^*, P_T^*)} = 0 \tag{3.4.8}$$

故 $P_0^* \geq \bar{P}$，而且若 $P_T^* < \bar{P}$，則 $\frac{\partial \pi(P_0, P_T)}{\partial P_0} = 0,\ \forall P_0 \leq \bar{P}$ 且 $P_0^* > \bar{P}$。

2. $\frac{\partial \pi(\ P_0^*, P_T)}{\partial P_T} < 0,\ \forall\ P_T > \bar{P}$，因此 $P_T^* \leq \bar{P}$。且若 $P_0^* > \bar{P}$，則

$$\frac{\partial \pi(\ P_0^*, P_T)}{\partial P_T} < 0\ \ \forall P_T \geq \bar{P}，因此\ P_T^* < \bar{P}。$$

證明：

1. 結合 (3.4.1) 式與圖 3.1，即可得本推論 1 之結果。

2. 結合 (3.4.2) 式與圖 3.2，即可得本推論 2 之結果。

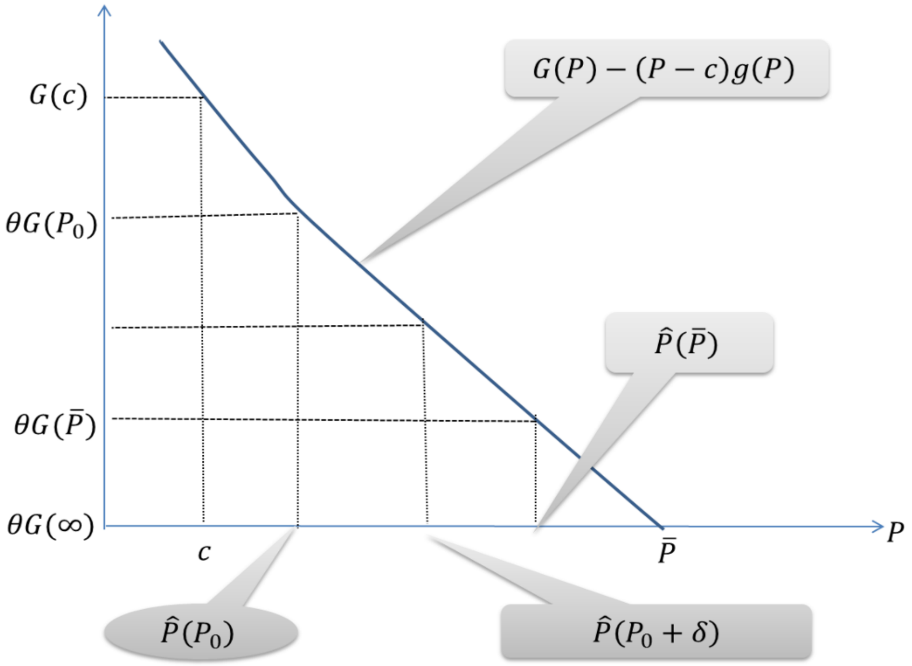

圖3.2 $\hat{P}(P_0)$ 與 $\hat{P}(P_0+\delta)$ 的關係

資料來源：本研究整理

3.5 求兩時段模式訂價最佳解

以下假設 $P_0^* \neq P_T^*$。給定 P_0，其中 $P_0 \geq \bar{P}$，令 $\hat{P}(P_0)$ 滿足

$$\pi\left(P_0, \hat{P}(P_0)\right) = \max_{P_T \in [c,\bar{P}]} \pi(P_0, P_T) \tag{3.5.1}$$

因 $\pi(P_0,P_T)$ 為 P_T 在閉區間 $[c,\bar{P}]$ 上的連續函數，故 (3.5.1) 之最佳解 $\hat{P}(P_0)$ 必存在，由 (3.4.2) 得

$$\frac{\partial \pi(P_0,P_T)}{\partial P_T}\Big|_{P_T=\bar{P}} = -e^{-rT}y_T G(P_0) < 0$$

故 $\hat{P}(P_0)<\overline{P}$。這表示給定 P_0 之 (3.5.1) 的最佳解 $\hat{P}(P_0)$ 不會發生於閉區間 $[c,\bar{P}]$ 的端點，因而其最佳解之一階條件為

$$0 = \frac{\partial \pi(P_0,P_T)}{\partial P_T}\Big|_{P_T=\hat{P}(P_0)} \quad \text{；利用 (3.4.2)}$$

$$= -e^{-rT}y_T G(P_0) +$$

$$[G(P_T)-(P_T-c)g(P_T)][\int_T^{\bar{T}} e^{-rt}y_t'\,dt + e^{-rT}y_T]\ \Big|_{P_T=\hat{P}(P_0)}$$

$$\forall\ P_0 \in [\bar{P},\infty) \qquad (3.5.2)$$

又因圖 3.1 曲線在 $P \in [c,\ \bar{P})$ 上恆向下凹，即

$$\frac{\partial^2 \pi(P_0,P_T)}{\partial P_T^2} = \left[\int_T^{\bar{T}} e^{-rt}y_t'\,dt + e^{-rT}y_T\right]\frac{d}{dP_T}[G(P_T)-(P_T-c)g(P_T)] < 0$$

恆成立；故等式 (3.5.2) 式為 (3.5.1) 式最佳解 $\hat{P}(P_0)$ 的充要條件。這表示給定 P_0 後，滿足下列等式之 P_T 值即為 $\hat{P}(P_0)$：

$$\left[G\left(\hat{P}(P_0)\right)-\left(\hat{P}(P_0)-c\right)g\left(\hat{P}(P_0)\right)\right]=\theta G(P_0) \tag{3.5.3}$$

其中

$P_0 \in [\bar{P},\infty)$，$\hat{P}(P_0) \in [c,\bar{P}]$；

θ 被定義為：

$\theta = \frac{e^{-rT}y_T}{\int_T^{\bar{T}} e^{-rt}y_t' dt + e^{-rT}y_T}$，$\theta \in (0,1)$

且 θ 只與 T、$\bar{T}$ 及函數 y_t 有關，與其他參數或函數皆無關。

由圖 3.2 得知：

$\hat{P}(P_0+\delta) > \hat{P}(P_0), \delta > 0$

故 $\hat{P}(P_0)$ 為 P_0 的嚴格增函數，如圖 3.3 所示。

事實上，考慮 (3.5.3) 對 P_0 微分可得：

$$-\theta g(P_0) = \left[-g\left(\hat{P}(P_0)\right)-g\left(\hat{P}(P_0)\right)-\left(\hat{P}(P_0)-c\right)g'\left(\hat{P}(P_0)\right)\right]\frac{d\hat{P}(P_0)}{dP_0}$$

因此由上式及 (3.5.4) 可得：

$$0 < \frac{d\hat{P}(P_0)}{dP_0} = \frac{\theta g(P_0)}{2g\big(\hat{P}(P_0)\big)+\big(\hat{P}(P_0)-c\big)g'\big(\hat{P}(P_0)\big)}$$ ；利用 (3.2.1) 式可得

$$= \frac{\theta g(P_0)}{2g\big(\hat{P}(P_0)\big)-\big(\hat{P}(P_0)-c\big)\frac{\hat{P}(P_0)-\mu}{\sigma^2}g\big(\hat{P}(P_0)\big)}$$

$$= \frac{\theta g(P_0)}{g\big(\hat{P}(P_0)\big)}\ \frac{\sigma^2}{2\sigma^2-\big(\hat{P}(P_0)-c\big)\big(\hat{P}(P_0)-\mu\big)}$$

$$= \frac{\theta g(P_0)}{g\big(\hat{P}(P_0)\big)}\ \frac{\sigma^2}{\left[\frac{(c+\mu)+\sqrt{(c-\mu)^2+8\sigma^2}}{2}-\hat{P}(P_0)\right]\left[\hat{P}(P_0)-\frac{(c+\mu)-\sqrt{(c-\mu)^2+8\sigma^2}}{2}\right]} \tag{3.5.4}$$

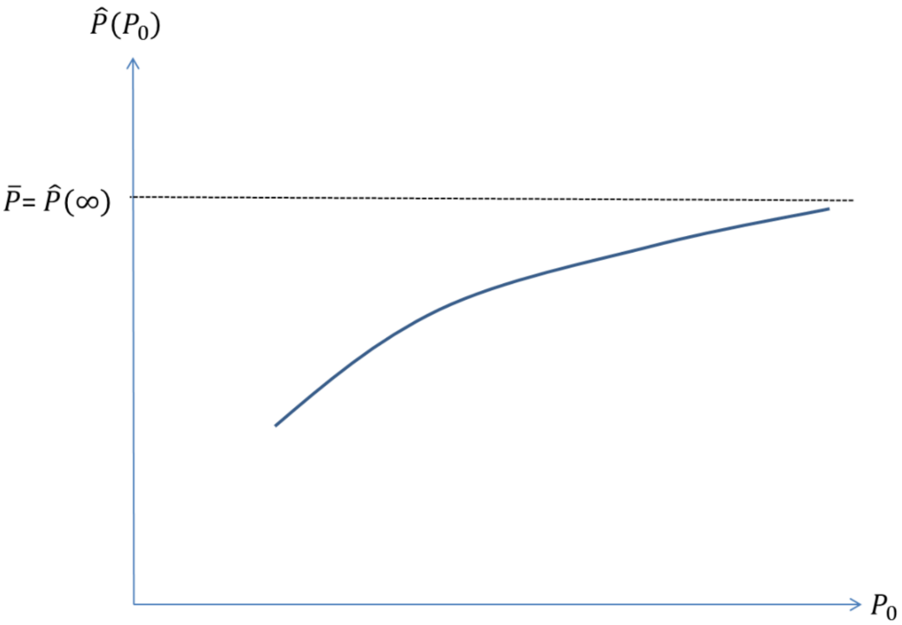

圖3.3 $\hat{P}(P_0)$ 與 P_0 的關係圖

資料來源：本研究整理

由 (3.5.4) 式可推論下列不等式必成立：

$$\frac{(c+\mu)-\sqrt{(c-\mu)^2+8\sigma^2}}{2} < \hat{P}(P_0) < \frac{(c+\mu)+\sqrt{(c-\mu)^2+8\sigma^2}}{2} \qquad (3.5.5)$$

從 (3.3.1) 式之 (P_0^*, P_T^*) 的定義及 (3.5.1) 式之 $\hat{P}(P_0)$ 定義，合併得知：等式 $P_T^* = \hat{P}(P_0^*)$ 必成立。

仿 (3.5.1) 式的建立（將給定 P_0 改成給定 P_T）考慮：給定 P_T 值，$P_T \in [c, \bar{P}]$，令 $\tilde{P}(P_0)$ 滿足等式：

$$\pi\left(\tilde{P}(P_0), P_T\right) = \max_{P_0 \in [\bar{P}, \infty)} \pi(P_0, P_T) \qquad (3.5.6)$$

由 (3.4.1) 及圖 3.1 得知：

$$\frac{\partial \pi(P_0, P_T)}{\partial P_0}\Big|_{P_0=\bar{P}} > 0$$

故給定 P_T 值 (3.5.6) 式之最佳解 $\tilde{P}(P_T)$ 不會發生在區間$[\bar{P}, \infty)$的左端點 $\bar{P}$。因此由 (3.4.1) 式得 (3.5.6) 式之最佳解 $\tilde{P}(P_0)$ 的一階條件如下：

$$0 = \frac{\partial \pi(P_0, P_T)}{\partial P_0}\Big|_{P_0=\tilde{P}(P_0)}$$

$$= \left[G\left(\tilde{P}(P_T)\right) - \left(\tilde{P}(P_T) - c\right) g\left(\tilde{P}(P_T)\right)\right]\left[\int_0^T e^{-rt} y_t' \, dt + y_0\right] +$$

$$e^{-rT}(P_T - c)y_T g(\tilde{P}(P_T)) \tag{3.5.7}$$

將上式作移項整理可得

$$\left[\frac{G\left(\tilde{P}(P_T)\right)}{g\left(\tilde{P}(P_T)\right)} - \left(\tilde{P}(P_T) - c\right)\right] = \tau(P_T - c) < 0,\ \forall\ P_T \in [c, \bar{P}] \tag{3.5.8}$$

式中 τ 被定義為

$$\tau = \frac{-e^{-rT}y_T}{\int_0^T e^{-rt}y_t' dt + y_0}$$

因為

$$\int_0^T e^{-rt}y_t'\,dt > e^{-rT}\int_0^T e^{-rt}y_t'\,dt = e^{-rT}(y_T - y_0)$$

故前述等式右邊之分母值大於其分子值，因而 $\tau \in (0,1)$。另由 τ 的定義易知： τ 只與 T、$\bar{T}$ 及函數 y_t 有關，與其他參數或函數皆無關。

又 (3.5.6) 式最佳解 $\hat{P}(P_T)$ 之二階條件為

$$0 \geq \frac{\partial^2 \pi(P_0,\ P_T)}{\partial {P_0}^2}\Big|_{P_0 = \tilde{P}(P_T)}$$

$$= \left[-2g\left(\tilde{P}(P_T)\right) - \left(\tilde{P}(P_T) - c\right)g'\left(\tilde{P}(P_T)\right)\right]\left[\int_0^T e^{-rt}y_t'\,dt + y_0\right] +$$

$$e^{-rT}(P_T - c)g'\left(\tilde{P}(P_T)\right), \forall\ P_T \in [c, \bar{P}] \tag{3.5.9}$$

考慮 (3.5.8) 對 P_T 微分並利用 $G'(z) = -g(z)$（參見 (3.2.1)）得：

$$\tau = [-1 - \frac{G(\tilde{P}(P_T))g'(\tilde{P}(P_T))}{g^2(\tilde{P}(P_T))} - 1]\frac{d\tilde{P}(P_T)}{dP_T}$$ ；利用(3.2.1)之 $g^{'}(z) = \frac{-(z-\mu)}{\sigma^2}g(z)$

$$= [-2 + \frac{G(\tilde{P}(P_T))\frac{(\tilde{P}(P_T)-\mu)}{\sigma^2}g(\tilde{P}(P_T))}{g^2(\tilde{P}(P_T))}]\frac{d\tilde{P}(P_T)}{dP_T}$$

$$= [-2 + \frac{G\left(\tilde{P}(P_T)\right)(\tilde{P}(P_T)-\mu)}{\sigma^2 g\left(\tilde{P}(P_T)\right)}]\frac{d(\tilde{P}(P_T))}{dP_T}$$

將上式移項整理可得

$$\frac{d\tilde{P}(P_T)}{dP_T} = \tau g(\tilde{P}(P_T))[\frac{\sigma^2}{2\sigma^2 g(\tilde{P}(P_T)) - G(\tilde{P}(P_T))(\tilde{P}(P_T)-\mu)}] \qquad (3.5.10)$$

接著討論 (3.5.10) 式中括號內分母之函數性質如下：

$$\frac{d}{dP_0}[2\sigma^2 g(P_0) - G(P_0)(P_0 - \mu)]$$

$$= [2\sigma^2\frac{-(P_0-\mu)}{\sigma^2}g(P_0) + g(P_0)(P_0 - \mu) - G(P_0)]$$

$$= -g(P_0)(P_0 - \mu) - G(P_0) \qquad (3.5.11)$$

因而，(3.5.11) 式之二次微分可得

$$\frac{d^2}{dP_0^2}[2\sigma^2 g(P_0) - G(P_0)(P_0-\mu)] = -g'(P_0)(P_0-\mu) > 0 \qquad (3.5.12)$$

因由 (3.2.1) 式，g 為常態分配，故 $-g'(P_0)$ 與 $(P_0-\mu)$ 同號。結合 (3.5.11) 式與 (3.5.12) 式可得：

$$[-g(P_0)(P_0-\mu) - G(P_0)] \text{ 為 } P_0 \text{ 的嚴格增函數} \qquad (3.5.13)$$

利用 (3.2.1) 式及羅必達法則（*L'Hopital's* Rule）可得：

$$\lim_{P_0\to\infty}[-g(P_0)(P_0-\mu) - G(P_0)] = \lim_{P_0\to\infty} g(P_0)(P_0-\mu)$$

$$= -\lim_{P_0\to\infty}\frac{\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{\frac{-(P_0-\mu)^2}{2\sigma^2}}}{\frac{-1}{P_0-\mu}} = -\lim_{P_0\to\infty}\frac{\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\times\frac{-(P_0-\mu)}{\sigma^2}\times e^{\frac{-(P_0-\mu)^2}{2\sigma^2}}}{\frac{-1}{(P_0-\mu)^2}}$$

$$= -\lim_{P_0\to\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma^3}\times\frac{(P_0-\mu)}{e^{\frac{(P_0-\mu)^2}{2\sigma^2}}} = -\lim_{P_0\to\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma^3}\times\frac{1}{\frac{(P_0-\mu)}{\sigma^2}\times e^{\frac{(P_0-\mu)^2}{2\sigma^2}}} = 0 \qquad (3.5.14)$$

結合 (3.5.13)、(3.5.14) 式可得：

$$[-g(P_0)(P_0-\mu) - G(P_0)] < 0, \forall\ P_0 \in [\bar{P}, \infty) \qquad (3.5.15)$$

因 (3.5.10) 右式中括號分母對 P_0 微分等於 (3.5.15) 左式，故 (3.5.10) 右式中括號分母值等於

$$2\sigma^2 g(P_0)-G(P_0)(P_0-\mu) \quad ;\text{它為 } P_0 \text{ 之嚴格減函數} \tag{3.5.16}$$

利用 (3.2.1) 式及羅必達法則，可得

$$\lim_{P_0\to\infty}[2\sigma^2 g(P_0)-G(P_0)(P_0-\mu)]=0 \tag{3.5.17}$$

結合 (3.5.16) (3.5.17) 式可得

$$2\sigma^2 g(P_0)-G(P_0)(P_0-\mu)>0 \quad \forall\ P_0\in[\bar{P},\infty) \tag{3.5.18}$$

由 (3.5.18) 式得知 (3.5.10) 式右式中乘號內分母值恆正，故 (3.5.10) 式恆正，即

$$\frac{d\hat{P}(P_T)}{dP_T}>0 \quad \forall\ P_T\in[c,\bar{P}]$$

利用 (3.2.1) 式及 (3.5.16) 式得知：

$$\frac{d}{dP}\left[-\frac{G(P)}{g(P)}+(P-c)\right]=-G(P)\frac{g'(P)}{g^2(P)}+2=G(P)\frac{\frac{-(P-\mu)}{\sigma^2}}{g(P)}+2$$

$$=\frac{1}{\sigma^2 g(P)}\big[-G(P)\big)(P-\mu)+2\sigma^2 g(P)]>0$$

故

$$\left[-\frac{G(P_0)}{g(P_0)}+(P_0-c)\right] \text{ 為 } P，P\in[\bar{P},\infty)，\text{的嚴格增函數} \tag{3.5.19}$$

由 (3.5.19) 式得知，(3.5.8) 式之 P_T，$P_T \in [c,\bar{P}]$，與 $\tilde{P}(P_T)$ 的關係如圖 3.5 所示，其中 $\bar{P}=\tilde{P}(c)$，參考 (3.4.5) 式。

結合圖 3.3 及圖 3.4 得圖 3.5。比較 (3.3.1)、(3.5.1)、(3.5.6) 最佳解得知：圖 3.5 中二曲線的交點即為 (P_0^*,P_T^*)。

【推論 3.4】

模式 (3.3.1) 的最佳解 $(P_0^*,\ P_T^*)$ 滿足 $P_T^*<\bar{P}<P_0^*$。

證明：

由圖 3.5 與推論 3 即得證此推論。

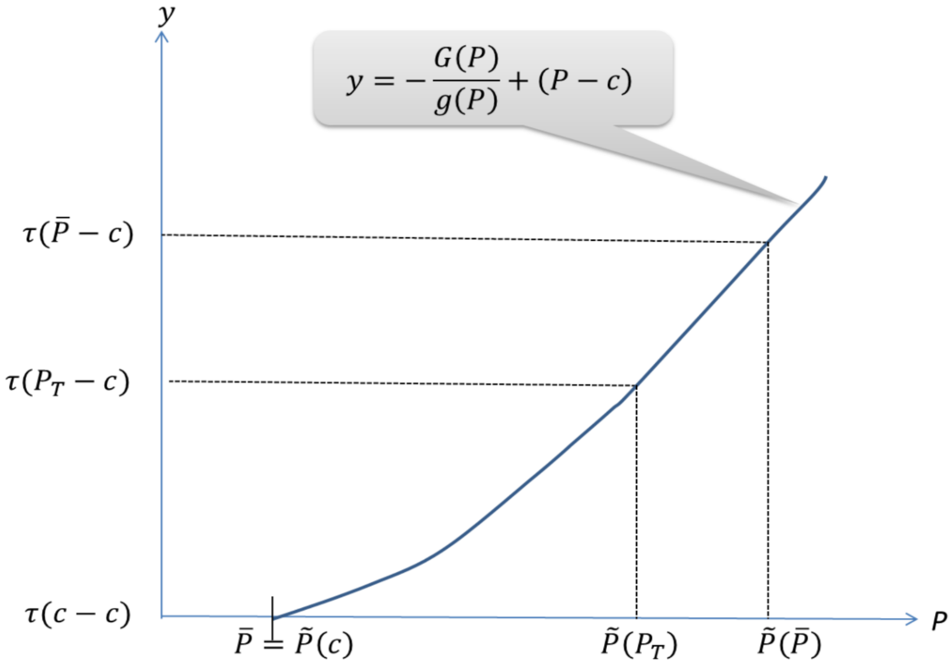

圖3.4 在 (3.5.8) 式中 P_T 與函數 $\tilde{P}(P_T)$ 的關係

資料來源：本研究整理

【推論 3.5】

假設 $P_0^* \neq \ P_T^*.$，則

1. 若不等式 $\sigma\sqrt{\frac{\pi}{2}} > \mu - c$ 成立，則 $\mu < \bar{P} < P_0^*$

2. 若不等式 $\sigma\sqrt{\frac{\pi}{2}} < \mu - c$成立，則 $\mu > \bar{P} > P_0^*$

綜合 1 與 2 可得，在此不等式 $P_0^* > \mu$ 與不等式 $P_T^* < \mu$ 二者之中，

至少有一不等式須成立。

證明：

利用推論 1 及推論 3 即得證。

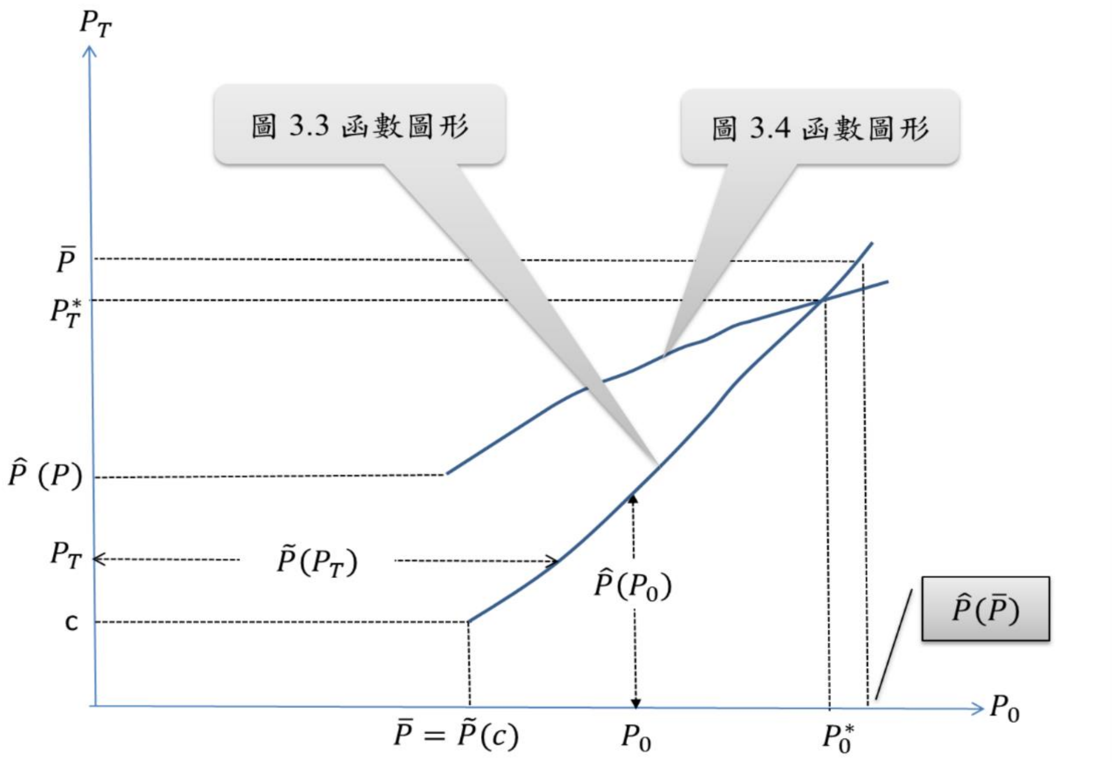

圖3.5 數學式 (3.5.1) 與 (3.5.6) 示意圖

資料來源：本研究整理

【推論 3.6】

若 $P_0^* \neq P_T^*$，則可以從圖 3.6 得到 (P_0^*, P_T^*) 的位置所在

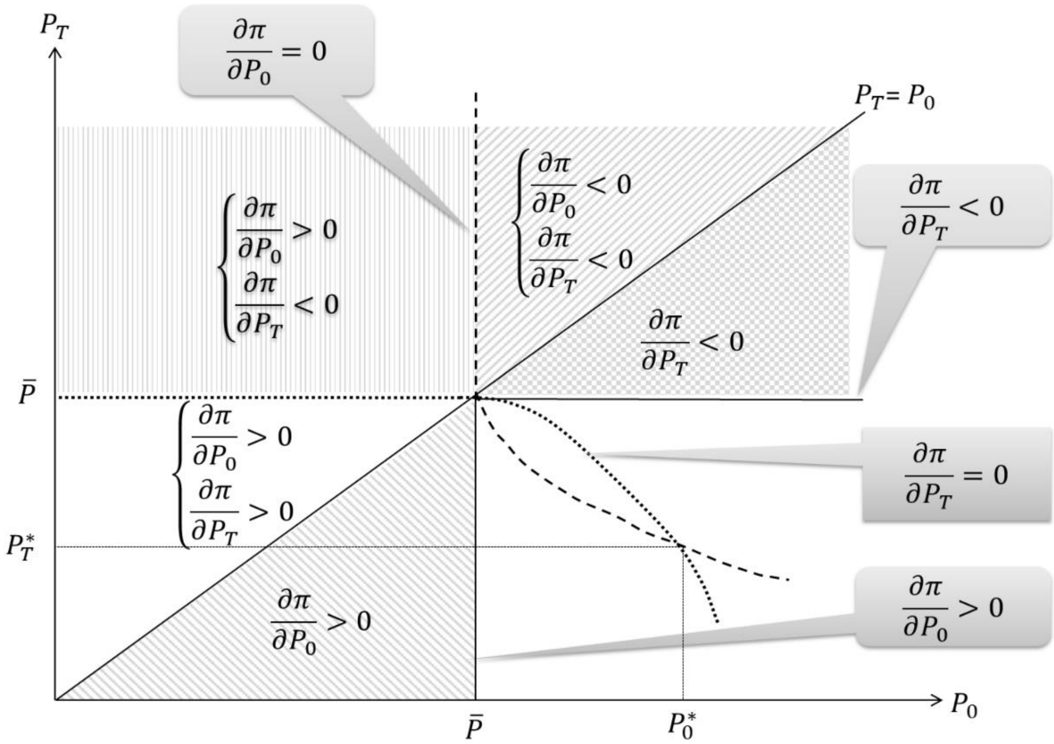

圖3.6 在 $P_0^* \neq P_T^*$ 假設下，$(P_0^*,\ P_T^*)$ 的位置示意圖

資料來源：本研究整理

【推論 3.7】

1. $(P_0^*,\ P_T^*)$ 對模式參數之敏感度分析，可由圖 3.2、圖 3.4、及圖 3.5 得到進一步的分析結果。

2. 利用圖 3.5 所得之 $(P_0^*,\ P_T^*)$ 及 (3.2.5) 式所得之函數 y_t 代入 (3.2.1) 式，可估計出最佳利潤 $\pi(P_0^*, P_T^*)$。

本研究之二時段最佳訂價模式亦可推廣至三時段 $[0, T_1)$、$[T_1, T_2)$、$[T_2, T_3)$ 等三時段最佳訂價情形：假設 (P_0, P_1, P_2) 分別為前述三時段之訂價，並假設 (P_0^*, P_1^*, P_2^*) 為使總折現利潤最大之最佳訂價；則

1. 若固定 T_1 與 P_0^*，則三時段訂價問題就成為 $[T_1,T_2)$ 與 $[T_2,T_3)$ 二時段的訂價問題。應用上述推論 3.4 可得 $P_1^* > \bar{\bar{P}} > P_2^*$，其中 $\bar{\bar{P}}$ 為合併 $[T_1,T_2)$ 與 $[T_2,T_3)$ 成為單一時段之最佳訂價水準。

2. 仿 (1) 的討論，若固定 T_2 與 $P_{T_2}^*$，則上述三時段訂價問題，就成為 $[0,T_1)$、$[T_1,T_2)$ 二時段的訂價問題，應用推論 3.4 可得 $P_0^* > \bar{P} > P_1^*$，其中 $\bar{P}$ 為合併 $[0,T_1)$、$[T_1,T_2)$ 成為單一時段的最佳訂價。

綜合上述可得下列推論 3.8。

【推論 3.8】

1. 假設廠商欲分別在數個訂價時段 $[0,T_1)$、$[T_1,T_2)$、$[T_2,T_3)$、…，分別決定訂價水準 P_0^*, P_1^*, P_2^*…，以使得其在整個區間之折現利潤最大，則 $P_0^* > \bar{P} > P_{T_1}^* > \bar{\bar{P}} > P_{T_2}^* >$…，其中 $\bar{P}$ 為合併 $[0,T_1)$ 與 $[T_1,T_2)$ 成單一訂價時段的最佳訂價；$\bar{\bar{P}}$ 為合併 $[T_1,T_2)$ 與 $[T_2,T_3)$ 成單一訂價時段的最佳訂價。

2. 如過上述訂價時段 $[0,T_1)$、$[T_1,T_2)$、$[T_2,T_3)$、…被細分成無數個，而形成廠商欲在各時點 t 決定訂價水準 P_t 的訂價控制問題，則使得廠商折現利潤最大化的最佳訂價函數 P_t^*，具有下列性質：P_t^* 為 t 的嚴格遞減函數，利用推論 5 之 1 可得推論 3.5 之 2 可得證。

證明：

利用推論 6 即得證。

推論 3.8 之 (2) 回答了下列有關新產品上市後之訂價 P_t 應隨時間

t 增加而增加，抑或應隨 t 增加而減少的迷惑觀點。這個迷惑觀點產生的背景如下：

觀點 1：

認為新產品上市價格應隨時間 t 增加而遞增者，其所持理由：新產品應於上市初期採低價策略以薄利多銷方式提高產品銷售量，並以此擴張的銷售量作為傳播產品訊息的種子，以最短時間達到傳播擴散的效果，尤其廠商之資金成本（折現率）高時，更應如此。

觀點 2：

認為新產品上市價格應隨時間 t 增加而遞減者，其所持理由為：廠商欲轉移或壓榨完成交易之消費者的消費剩餘，而成為廠商自己額外的利益，當然是初期採高價策略，而後訂價隨時間增加而減少才可達到此目的（訂價隨時間而降低，才可能依據不同臨櫃消費者願買價格上限不同而差別取價）。

對於上述價格控制原則的迷惑觀點，本研究的結果（推論 9）是支持觀點 2 的。

3.6 最佳解敏感性分析

Bass (1969) 等學者認為新產品上市後，購買產品的訊息如傳染病隨時間擴散，其任一時間點的擴散力量為當時已購買產品人數的正斜率線性函數。本研究雖認同新產品上市後之產品訊息會如傳染病的擴散，卻不完全同意其擴散力量來源的假設。概因如豪宅、大型傢俱等不易被移動或如內衣可被移動卻不常被曝光的產品，是無法透過被消費者配戴於公眾

場合移動曝光，而產生被他人透過眼識接收此產品訊息。因此創設「臨櫃潛在消費者」之概念，並用此概念來精緻化上述新產品訊息擴散的力量來源。所謂 t 時臨櫃消費者乃指 t 時前對其在意的產品功能自以為充分了解，只剩價格因素，就可以決定是否購買的民眾。由於任一民眾先要成為臨櫃潛在消費者，才能在價格滿意下，而成為已實現消費者。故本文引用 Bass 模式中之新產品傳播力量來源，從以購買消費群改變成為臨櫃消費群，是完整化產品訊息傳播力量來源，而不是否定 Bass 模式之新產品訊息擴散的力量來源的假設。因此臨櫃消費群人數是如何隨時間而增加，以及了解訂價水準的改變是如何誘發民眾購買慾，可做為擬訂價策略主要參考依據。本研究以廠商折現利潤最大化立場，來建構此兩時段最佳化訂價模式。本研究不但展示上述模式最佳解的許多性質（詳見推論 3.1 至推論 3.8），同時亦提出解決新產品上市後其訂價水準應隨時間增加而增加或隨時間增加而減少之困惑問題的方法（詳見推論 3.8）。

第四章 養價擴散模式

本章則討論前述情況二：在給定訂價 P_0 與 P_T 的情境下，尋求最佳養價期間 T^*之「訂價給訂追求最佳養價期間情況」。本章將以此情況之問題背景來討論養價擴散模式最佳解特性及其管理意涵。本章於擴充 Bass 擴散模式中，以「臨櫃潛在消費群人數」與「售價水準」等雙重擴散力量來源，探討時間變化與價格變化對潛在消費群願買價格上限機率密度函數的影響。兩時段訂價模式（第三章）為養價擴散模式的特例。

4.1 問題背景

如第一章之例子，商家推出高價新產品要養價多久才採取降價促銷活動（如週年慶等促銷活動），以有效地引起潛在消費者採取購買行動而達成銷售目標。本章仍以尋求銷售利潤目標函數的最大，探討擴散力量來源在時間變化與價格變化上會對潛在消費群願買價格上限機率密度函數造成何種影響，以估計潛在消費群的購買比率，再進一步估計廠商之銷售金額。前章所討論的兩時段訂價模式為本章養價擴散模式的特例。本章以此情境來推導與討論養價擴散模式之特性和討管理意涵。

4.2 養價擴散模式與 Bass 擴散模式適用場合的異同

本研究定義的養價模式，為一種利用類似吸脂訂價法（Skim Pricing）(Noble & Gruca, 1999)，在新產品上市初期訂定高價，先爭取對價格最不敏感、願意支付高價的消費者的注意、臨櫃進一步探詢產品內容、或採取購買行動。並藉由聲望訂價法的特性，透過組織之資源投入，將產品訊息傳播擴散，讓更多潛在消費者知曉產品信息。並於所選定的時間點，進行

特殊事件訂價法實施適度減價促銷行動，以達成所預計銷售數量，並獲致最大利潤。學者在這個領域的研究仍稀少，作者尚無法找到類似個案進行參考。

以時間順序而言，在 $t<0$（即在新產品正式上市發表之前）就在市場上進行新產品的廣告，預告新產品的功能特性與即將上市的資訊。在時間 $t\in[0,T)$ 期間，於 $t=0$ 新產品正式發表上市，新產品訂價 P_0，吸引對新產品有一定了解的消費者臨櫃進一步探詢價格資訊或購買，此為養價期間 T；在時點 $t=T$，賣方進行減價促銷行動，並獲致最大利潤。

為方便分析，本文將 t 時點消費者依其特性分為下列四類：

1. 0 時點潛在消費者；
2. t 時點前，臨櫃潛在消費者；
3. t 時點前，已購買消費者；
4. t 時點前，尚未購買消費者。

其中潛在消費者係指 0 時點對產品之持有會帶來正效用之民眾。價格不在意的情形下，即產品的價格水準降至零，仍願意擁有該產品之民眾。所有潛在消費者形成之群眾，將被稱為潛在消費群，其人數以 N 表示之。t 時點前臨櫃消費者係指潛在消費者在 t 時點（含）前，對其在意的某些產品功能面自以為已有充份理解，其程度曾達到只剩售價水準因素，就可決定是否購買的民眾。在 t 時點前所有臨櫃消費者所形成之群眾，稱為 t 時點前臨櫃消費群，其數量以 y_t 或 $y(t)$ 表示之。其中由式 (4.3.2)、(4.3.3) 得知於 $t=0$ 時（為產品正式上市時間點），$\mathrm{y}_0=0,\ y_0'=\alpha N$（參閱附錄一）。$t$ 時點前臨櫃消費群又可被劃分成兩類：一類為 t 時前（含）

已購貨者，另一類為至 t 時點尚未購貨者。前者稱為 t 時點前已購買消費群；後者為 t 時點前未購買消費群。t 時點前已購買（未購買）臨櫃消費群，依上述定義得知，對任一 t 值，$t \geq 0$，恆有下列集合包含關係：{潛在消費群} ⊃ { t 時點前臨櫃消費群} = { t 時點前已購買消費群} ∪ {t 時點前未購買消費群}

即 $N \geq y_t$ =(t 時點已購買消費群數) + (t 時點前未購買消費群數)

4.3 Bass 擴散模式的擴充

本文採用擴充 Bass 擴散模式之新產品擴散模式 (Shih, 2008; Chen, Li, & Wang, 2016; Wang, Chen, & Li, 2016) 進行養價模式之分析討論。假設臨櫃消費群體如流行性傳染病般地隨時間 t 擴散，對任一時點 t，皆有一股傳染力量（其強度為 $\alpha + \beta y_t$，$\alpha \geq 0,\ \beta \geq 0$）吸引尚未成為臨櫃消費者 (其人數為 $N - y_t$) 成為新的潛在消費群（其增加率為 y_t' ）。因此臨櫃消費群之擴散微分方程式，可修正為以 t 時點前臨櫃消費群數 y_t 來代替 Bass 擴散傳播模式中之累積銷售數量 x_t 如式 (4.3.1) 所示：

$$y_t' = (\alpha + \beta y_t)(N - y_t), \qquad t \geq 0 \tag{4.3.1}$$

其中 α 值是用來反應於潛在消費群中，對新產品具創新或主動嘗試屬性的人數比。而 β 值是用來反應於潛在消費群中，對新產品具模仿屬性的人數比。當然 α、β 直接與廠商對新產品的廣告方式，及單位時間之廣告支出金額呈正相關。惟本模式假設廠商之廣告方式與單位時間之廣告支出皆是給定的。因此 α、β 將被視為本模式的參數。

本擴散模式與 Bass 擴散傳播模式之最大不同點，在於擴散傳染力

量的來源。有些產品是可以被消費者配戴或隨消費者行蹤移動而被民眾以眼識（視覺）感知，進而產生擴散傳染力。因此其擴散傳染力與累積銷售量，x_t，呈正向關係。但有些產品，如豪宅、名貴傢俱、與不易或不適移動的高價產品等，無法隨著擁有該產品的消費者行蹤移動而被民眾以眼識感知。其擴散傳染力是透過理解部分產品功能民眾（此民眾的某些比例是 t 時點前臨櫃消費者）佐以口耳相傳，而被民眾以聽覺感知，進而成為擴散傳染力量來源。由於 t 時點前臨櫃消費群包含了 t 時點前已實現消費群，故其擴散傳染力適合用 t 時點前臨櫃消費群數 y_t 為基準而表示成 $\alpha+\beta y_t$。

由解微分方程式 (4.3.1) 可得（參見附錄一）：

$$y_t = N - \frac{\frac{\alpha}{\beta}+N}{1+\frac{\alpha}{\beta N}e^{(\alpha+\beta N)t}} + y_0 \geq 0,\ \forall t \tag{4.3.2}$$

$$y_t' = \frac{\left(\frac{\alpha}{\beta}+N\right)\frac{\alpha}{\beta N}(\alpha+\beta N)e^{(\alpha+\beta N)t}}{\left[1+\frac{\alpha}{\beta N}e^{(\alpha+\beta N)t}\right]^2} + y_0 \geq 0,\ \forall t \tag{4.3.3}$$

潛在消費群在不知或未受歷史成交價格所造成的心理影響下（如新產品剛上市），於上市時點 t=0 狀況下，純粹就產品功能所引起的消費者效用衡量，其願買（且能買）價格上限值為 z 的分配密度函數，以 g_0(z) 表示之， $z \in [0, P_t]$，即 $g_0(P)=0, \forall\ P \geq P_0$。$P_t$ 表 t 時點之訂價，其中 P_0 為廠商上市時之初始價格，且 P_0 大於養價期間 [0, T) 結束後的價格（促銷價格）P_T，其促銷期間為 $[T, \infty)$。於養價模式中，訂價策略定義為如下：

$$P_t = \begin{cases} P_0 & \text{當 } \mathrm{t} \in [0, \mathrm{T}) \\ P_T & \text{當 } \mathrm{t} = [\mathrm{T},\ \infty) \end{cases}$$

式中 T 為進行促銷之時間起點，其值為廠商之養價時間長度。廠商在 $[0, T)$ 時間內，即使收入小於支出，仍然不降價求售。其目的是企圖應用高訂價 P_0 的訊息傳播（價格錨定），提高每一位 t 時點前未實現消費者之願買價格上限 z 值，而企圖增加 t 時點成交價 P_t 之 t 時點前臨櫃消費群的購買比例，其中 $P_t < P_0$。由上述函數 $g_0(z)$ 的定義得知：若以符號 $G_t(P)$ 表示 t 時點前臨櫃消費群的購買比例函數，則

$$G_0(P) = \int_{z \geq P} g_0(z) dz$$

$G_0(P)$ 為自 $t = 0$ 時至 t 時點前臨櫃消費群的購買比例函數。當 $t \in (0, T)$ 時，$G_t(P)$ 與 $G_0(P)$ 的關係如式 (4.3.4) 所示。當 $t \in [0, \infty)$ 時，$G_t(P)$ 與 $G_0(P)$ 的關係如 (4.3.5)、(4.3.6)、(4.3.7) 所示。

當廠商在 $t = 0$ 開始上市產品，並在 $t \in [0, T)$ 時間內皆維持訂價 P_0 後，從 $t = 0$ 開始，此訂價為 P_0 的訊息，即陸續被傳播擴散。當此信息傳播至原 z 值小於 P_0（另一種情況為大於 P_0 ）之未實現消費者，則會造成提高（另一種情況會下降）其願買價格上限 z 值。亦即隨著時間經過，逐漸降低 z 值與 P_0 的差距幅度，但不逾越（或低於）P_0。潛在消費者 z 值之調整，將引起各時點之 t 時點前臨櫃消費群的購買比例函數 $G_t(P)$ 之變化（類似旋轉），即 0 時點需求函數 $\theta = G_0(P)$ 會隨時間演變成 t 時點需求函數 $\theta = G_t(P)$，再演變成時間終點 T 的需求函數

$G_T(P)$（如圖 4.1 所示)；由圖 4.1 亦可知

$$G_t(P_0) = G_T(P_0) = G_0(P_0)$$

的關係是成立的。

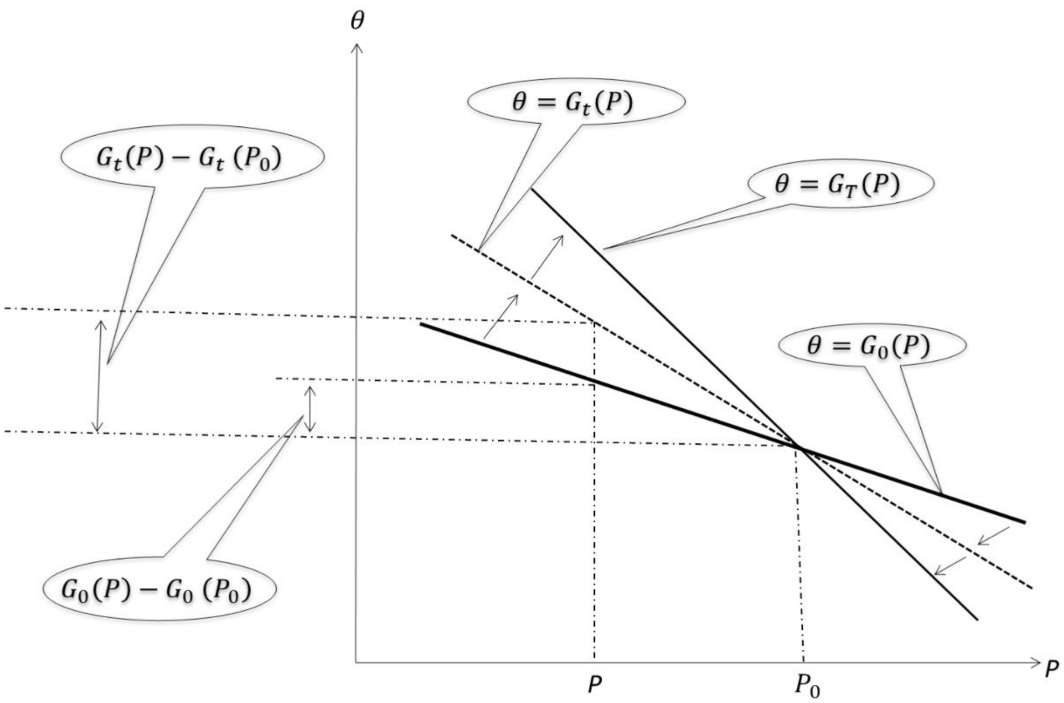

圖4.1 當 $t \in [0,T]$，t 時點臨櫃購買比例函數 $G_t(P)$ 的變化示意圖
資料來源：本研究整理

因為 t 時點前未實現消費者之願買價格上限 z 值多少皆會受歷史成交價格的影響而改變。即當 $P < P_0$ 時，$G_0(P_0) < G_0(P) < G_t(P)$，$G_0(P)$ 永遠介於 $G_0(P_0)$ 與 $G_t(P)$ 之間，故 $G_0(P)$ 亦可表示為 $G_t(P_0)$ 與 $G_t(P)$ 的指數加權平均；其中權數因此 e^{-st} 與 $1-e^{-st}$ 介於 0 與 1 之間。r 為廠商之資金成本，s 表示成交價之傳播影響未購貨消費者願

買價格上限在單位時間內調整的幅度，本論文假設 r、s 皆為參數。

$$G_0(P) = (1 - e^{-st})G_t(P_0) + e^{-st}G_t(P)$$

即

$$G_0(P) - G_t(P_0) = e^{-st}[G_t(P) - G_t(P_0)] \tag{4.3.4}$$

其中 t 愈小，權數 e^{-st} 愈大，函數 $G_t(P)$ 愈靠近 $G_0(P)$（參見圖 4.2 左側標示）。因此 (4.3.4) 中參數 s，$s > 0$，可代表歷史成交價之傳播影響 t 時點前未實現消費者願買價格上限調整的幅度或強度 (Chen & Chen, 1998)。

當 $t \in [T,\ \infty)$ 時，臨櫃購買比例函數 $G_t(P)$ 可仿照 (4.3.4) 式之討論。若只銷售至促銷時點 T，廠商預計在 T 時點銷售情形會有秒殺現象，則文中稍後所表示圖 4.2 及 (4.3.5)、(4.3.6)、(4.3.7) 和 (4.3.10) 式之討論便可忽略之。

即

$$e^{st}[G_0(P) - G_0(P_T)] = G_T(P) - G_T(P_T)$$

$$= e^{-s(t-T)}[G_t(P) - G_t(P_T)],\ \forall\ t \geq T$$，亦即

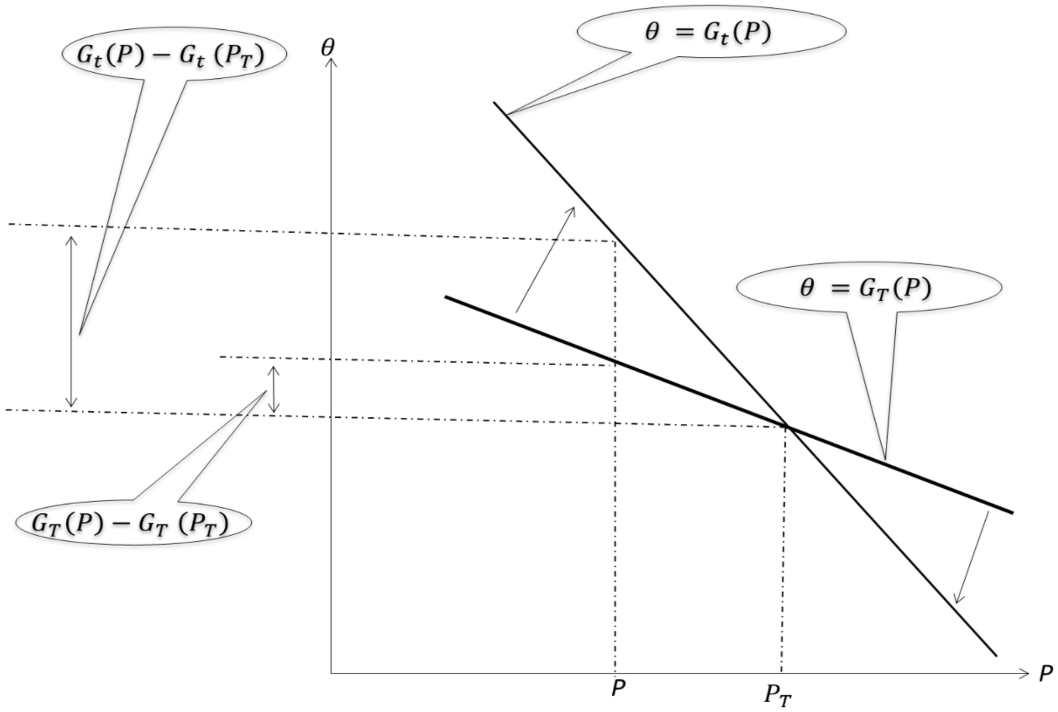

圖4.2 當 $t \in [T,\ \infty)$，t 時點臨櫃購買比例函數 $G_t(P)$ 的變化示意圖

資料來源：本研究整理

$$G_0(P) - G_0(P_T) = e^{-st}[G_t(P) - G_t(P_T)], \qquad \forall\ t \geq T \tag{4.3.5}$$

亦即當 $t \geq T$ 時

$$G_t(P)\ \ = G_t(P_T) + e^{s(t-T)}[G_T(P) - G_T(P_T)]\ \ \{\text{利用 } G_t(P_T) = G_T(P_T)\}$$

可得

$$G_t(P) = (1 - e^{sT})G_0(P_0) + e^{sT}G_0(P_T) - e^{st}G_0(P_T) + e^{st}G_0(P) \tag{4.3.6}$$

因而

$$G_t(P_T) = (1 - e^{sT})G_0(P_0) + e^{sT}G_0(P_T), \quad \forall t \geq T \tag{4.3.7}$$

為分析本研究之養價模式，令廠商單位時間內銷售活動之支出，至少包含銷售場所租金、銷售人力薪資、廣告支出、存貨成本等等費用，以 A 表示之，且 A 為常數參數。 c 表示單位產品的製造成本或取得成本（銷貨成本）。 r 為現金流量之折現率，為廠商之資金成本。並令 c、r 皆設為參數。廠商於各時點之折現收入現金流量定義如下：

1. 於時間 $t \in [0,T)$ 的折現收入現金流量為：

$$L_1 = \int_0^T e^{-rt}\, y_t' G_t(P_0)(P_0 - c)dt$$

其中 $y_t' G_t(P_0)$ 為 t 時點臨櫃消費群之購買數量；y_t' 如 (4.3.3) 式所示；函數 $G_t(P)$ 如 (4.3.5) 式所示；因 $G_t(P_0) = G_0(P_0)$。故上式可改寫成 (4.3.8) 式：

$$L_1 = \int_0^T e^{-rt}\, y_t' G_0(P_0)(P_0 - c)dt \tag{4.3.8}$$

2. 於時點 T 之折現收入現金流量為：

$$L_2 = e^{-rT}(y_T - y_0)[G_T(P_T) - G_T(P_0)](P_T - c)$$

因 $P_T < P_0$，故在 $t \in\ [0,T)$ 之臨櫃未實現消費者與在 T 時點之臨櫃已

實現消費者皆曾在某 t 時點 $(t<T)$覺得價格 P_0 太高而未購買。上式中之 $y_0=0$、$y_0'=\alpha N$（參閱附錄一），由 (4.3.6) 式可知

$$G_t(P_T)=(1-e^{sT})G_0(P_0)+e^{sT}G_0(P_T)$$

故上式可改寫成 (4.3.9)：

$$L_2=e^{-rT}(y_T-y_0)e^{sT}[G_0(P_T)-G_0(P_0)](P_T-c) \tag{4.3.9}$$

3. 於時點 $t\in(T,\infty)$ 之折現收入現金流量為：

$$L_3=\int_T^{\infty}e^{-rt}y_t'G_t(P_T)(P_T-c)dt$$

代入 $G_t(P_T)=(1-e^{sT})G_0(P_0)+e^{sT}G_0(P_T)$，上式可改寫成

$$L_3=\int_T^{\infty}e^{-rt}y_t'[(1-e^{sT})G_0(P_0)+e^{sT}G_0(P_T)](P_0-c)dt \tag{4.3.10}$$

其中 $y_t'[(1-e^{sT})G_0(P_0)+e^{sT}G_0(P_T)]$ 為 t 時點前臨櫃消費群之購買數量，其中 y_T 如 (4.3.2) 式所示，函數 $G_t(P)$ 如 (4.3.8) 式所示。若只銷售至促銷時點 T（即廠商估計在 T 時點會瞬間秒殺，所有產品銷售一空），則 $L_3=0$，故本項可忽略之。

由 (4.3.8)、(4.3.9)、(4.3.10) 式可知，欲使養價模式折現利潤最大的一般化數學模式，整理如 (4.3.11) 式所示：

$$Max\ \ L=L_1+L_2+L_3-\int_0^{\infty}e^{-rt}Adt \tag{4.3.11}$$

4.4 養價擴散模式最佳解

(4.3.11) 式包含了三個經營管理者必須進行決策之變數： 新產品上市時初始價格 P_0、養價時間長度 T 與促銷價格 P_T。其最佳解可以分別表示為 P_0^*, T^*, P_T^*。雖然一般化模式 (4.3.11) 式共有 3 個決策變數，但實務上此 3 個決策變數往往授權給不同決策者進行決策，如果本文是站在一位被授權可決定養價時間長度主管的立場，則其所面對的問題相當於在 (4.3.11) 式中將 P_0, P_T 等變數視為參數，而僅將 T 視為決策變數的狀況。本文將在此假設下，尋求模式 (4.3.11) 式的最佳解 T^*。考量 (4.3.11) 式目標值 L 對 T 微分可得：

$$L' = e^{-rT} y_T' G_0(P_0)(P_0 - c) +$$

$$e^{s-r}[G_0(P_T) - G_0(P_0)](P_T - c)[y_T' + (s-r)y_T] -$$

$$e^{-rT} y_T'(P_T - c)[(1 - e^{sT})G_0(P_0) + e^{sT}G_0(P_T)] +$$

$$(P_T - c)\int_T^{\infty} e^{-rt} y_t' s e^{sT}[G_0(P_T) - G_0(P_0)]dt$$

上式經合併整理成為：

$$L' = e^{-rT} y_T' G_0(P_0)(P_0 - P_T) +$$

$$[G_0(P_T) - G_0(P_0)](P_T - c)[-(r-s)e^{-(r-s)T} y_T] +$$

$$[G_0(P_T) - G_0(P_0)](P_T - c)\ \ s e^{sT}\int_T^{\infty} e^{-rt} y_t' dt \tag{4.4.1}$$

於 (4.4.1) 式中各參數間之關係說明如後：因養價擴散模式在養價期間後須進行降價促銷，所以 $P_T < P_0$，其中降價促銷將導致願買價格上限較低之臨櫃消費群的購買。使得 $G_0(P_T) \geq G_0(P_0)$ 成立，其中 $G_0(P_0) \geq 0$；且在保證獲利的條件下，不等式 $P_T > c$ 亦要成立。另由附錄一、二得知

$$y_T \geq 0,\ y_T' \geq 0$$

(4.4.1) 式等號右側部分共可分成 3 項，茲針對各項函數值的正負值進行說明如下：

1. (4.4.1) 式第 1 項函數值恆為正值，概因如前所述 $P_T < P_0$ 且因

   $$(e^{-rT}y_T')' = e^{-rT}(-rty_T' + y_T'') < 0$$

   （參見附錄一，$e^{-rT}y_T'$ 為 T 之減函數，$\lim_{T\to\infty} e^{-rT}y_T' = 0$ 之故）。(4.4.1) 右式第一項函數圖形如圖 4.3 所示。

2. 若 $r > s$ 則 (4.4.1) 式第 2 項函數值為負值，其函數圖形如圖 4.4 所示；它在 $T \in [0, T_1)$ 上為嚴格遞減；在 $T \in (T_1,\ \infty)$ 上為嚴格遞增，其中 $T_1 > 0$ 滿足等式

   $$\left(\alpha + \beta y_{T_1}\right)\left(N - y_{T_1}\right) = (r - s)y_{T_1}$$

因此

$$\beta y_{T_1}^2 + [(r-s)+\alpha-\beta N]y_{T_1} - \alpha N = 0$$

解上述 y_{T_1} 之二次多項式可得

$$y_{T_1} = \frac{(\beta N-\alpha-\mathrm{r}+\mathrm{s})\pm\sqrt{(\beta N-\alpha-r+s)^2+4\beta\alpha N}}{2\beta}$$

又因為 $y_{T_1} \geq 0$，故在上式根號前之正負號中只能取正號，得

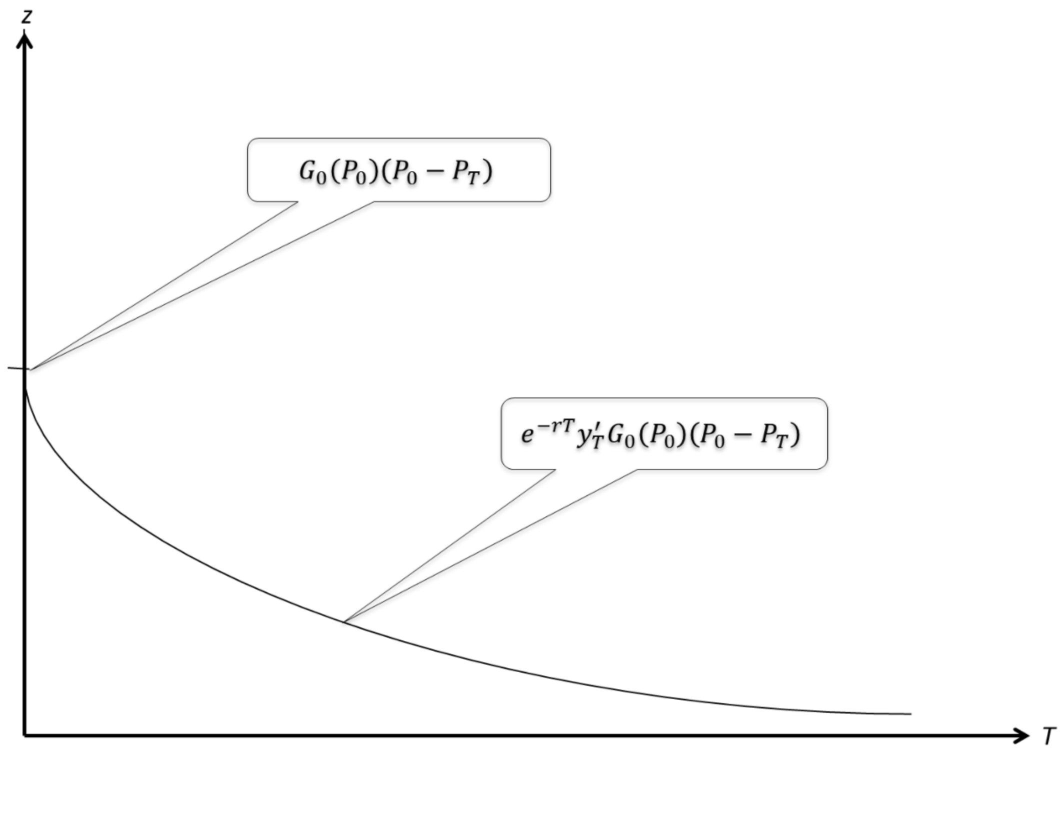

圖4.3 (4.4.1) 式第 1 項函數之圖形

資料來源：本研究整理

$$y_{T_1} = \frac{(\beta N-\alpha-\mathrm{r}+\mathrm{s})+\sqrt{(\beta N-\alpha-r+s)^2+4\beta\alpha N}}{2\beta}$$

這表示 T_1 滿足下列等式：

$$N - \frac{\frac{\alpha}{\beta}+N}{1+\frac{\alpha}{\beta N}e^{(\alpha+\beta N)T_1}} = y_{T_1}$$

$$= \frac{(\beta N-\alpha-\mathrm{r}+\mathrm{s})+\sqrt{(\beta N-\alpha-r+s)^2+4\beta\alpha N}}{2\beta} < N$$ （參見附錄二）

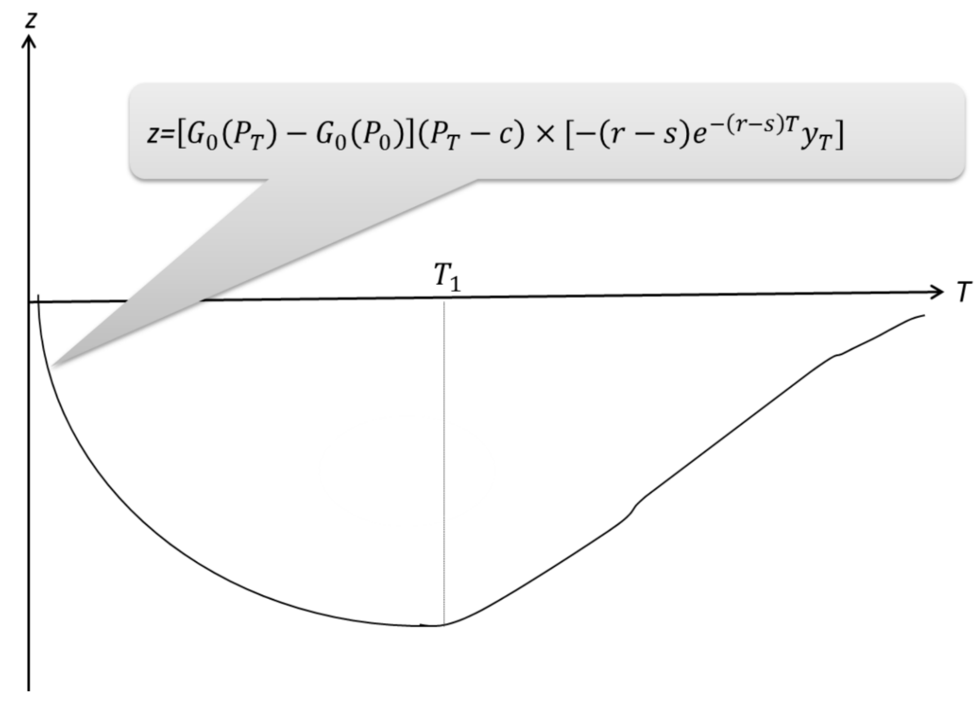

圖4.4 (4.4.1) 式第 2 項函數之圖形

資料來源：本研究整理

因為 y_T 為 T 的嚴格遞增函數且 y_T 的值域為 $[0, N]$，故滿足前述等式之 T_1 值唯一存在。考慮 (4.4.1) 右式後二項相加後對 T 微分得知：

$$\frac{d}{dT}\{[G_0(P_T)-G_0(P_0)](P_T-c)\left[-(r-s)e^{-(r-s)T}y_T+se^{sT}\int_T^{\infty}e^{-rt}y_t'dt\right]\}$$

$$=-[G_0(P_T)-G_0(P_0)](P_T-c)(r-s)e^{-(s-r)T}\quad\times$$

$$\beta\ \left[y_T-\frac{(\beta N-\alpha-r+s)+\sqrt{(\beta N-\alpha-r+s)^2+4\beta\alpha N}}{2\beta}\right]\times$$

$$\left[y_T-\frac{(\beta N-\alpha-r+s)-\sqrt{(\beta N-\alpha-r+s)^2+4\beta\alpha N}}{2\beta}\right]$$

上式恆負；概因 $y_{T_1}<N$ 且 $\lim_{T_1\to\infty}y_{T_1}=N$ ，故下列不等式成立

$$-\alpha-(r-s)+\sqrt{(\beta N-\alpha-r+s)^2+4\beta\alpha N}<\beta N$$

之充要條件為

$$\sqrt{(\beta N-\alpha-r+s)^2+4\beta\alpha N}<\beta N+\alpha+(r-s)$$

即

$$(\beta N-\alpha-r+s)^2+4\beta\alpha N<[\beta N+\alpha+(r-s)]^2\quad；$$

$$4\beta\alpha N<4\beta N[\alpha+(r-s)]$$

亦即其充要條件為

$\alpha < \alpha + (r - s)$

在 $r > s$ 之假設下，上述不等式顯然成立，且當，r 愈越靠近 s，此不等式右邊的值就愈靠近左邊的值，同時 y_{T_1} 就愈靠近 N，亦即 T_1 愈近 ∞。T_1 為 (4.4.1) 式第 2 項函數由遞減轉為遞增之轉折點（如圖 4.4 所示），其值為

$$T_1 = \frac{1}{\alpha+\beta N} ln \frac{[\alpha-(r-s)]+\sqrt{(\beta N-\alpha-r+s)^2+4\beta\alpha N}+\beta N}{\alpha+\frac{\alpha}{\beta N}[\alpha+(r-s)]-\sqrt{(\beta N-\alpha-r+s)^2+4\beta\alpha N}} \tag{4.4.2}$$

3. (4.4.1) 式第 3 項函數值恆為正值

證明如下：

因 (4.4.1) 式第 3 項前因子 $[G_0(P_T) - G_0(P_0)](P_T - c)$ 恆正（參見 (4.4.1) 式後之文字說明）；而其後因子為

$$se^{sT}\int_T^{\infty} e^{-rt}y_t' dt = se^{-(r-s)T}\int_T^{\infty} e^{-r(t-T)}y_t' dt$$

且

$se^{-(r-s)T}\int_T^{\infty} e^{-rt}y_t' dt$ 為 T 的嚴格減函數之故，（因 $y_t'' < 0$，y_t' 為 t 減函數）。

由下列 (4.4.3) 式之推導可知 (4.4.1) 式第 2 項加上 (4.4.1) 式第 3 項在 $T = T_1$ 之值恆為負數。亦即若存在 T 使得 (4.4.3) 式為負數，則有機會使得 (4.4.1) 式 $L' = 0$，(4.3.11) 式有最佳解 T^*。

$$[G_0(P_T) - G_0(P_0)](P_T - c)[-(r-s)e^{-(r-s)T}y_T] +$$

$$[G_0(P_T) - G_0(P_0)](P_T - c)\ se^{sT}\int_T^{\infty} e^{-rt}y_t' dt <$$

$$([G_0(P_T) - G_0(P_0)](P_T - c)e^{-(r-s)T}[-(r-s)y_T + y_T'], \quad \forall T$$

即

$$\{[G_0(P_T) - G_0(P_0)](P_T - c)[-(r-s)e^{-(r-s)T}y_T] +$$

$$[G_0(P_T) - G_0(P_0)](P_T - c)\ se^{sT}\int_T^{\infty} e^{-rt}y_t' dt\}|_{T=T_1} < 0 \qquad (4.4.3)$$

綜合上述 1、2 和 3 之圖形分析，利用 (4.4.3) 式將 (4.4.1) 式第 2 項與其第 3 項相加（即圖 4.4 和 圖 4.5），得其函數圖形如圖 4.6 所示。

本文討論下列三種假設情況之最佳解，如圖 4.6 所示：

情況 1：

若

$$\left[G_0\left(P_{T_1}\right) - G_0(P_0)\right]\left(P_{T_1} - c\right)\left[-(r-s)e^{-(r-s)T_1}y_{T_1}\right] +$$

$$\left[G_0\left(P_{T_1}\right) - G_0(P_0)\right]\left(P_{T_1} - c\right)\ se^{sT_1} \int_{T_1}^{\infty} e^{-rt} y_t' dt \ < \ 0$$

即 (4.4.1) 式第 2 項與其第 3 項相加，在 $t = T_1$ 的值小於 0 之情況，則 T^* 滿足下列等式：

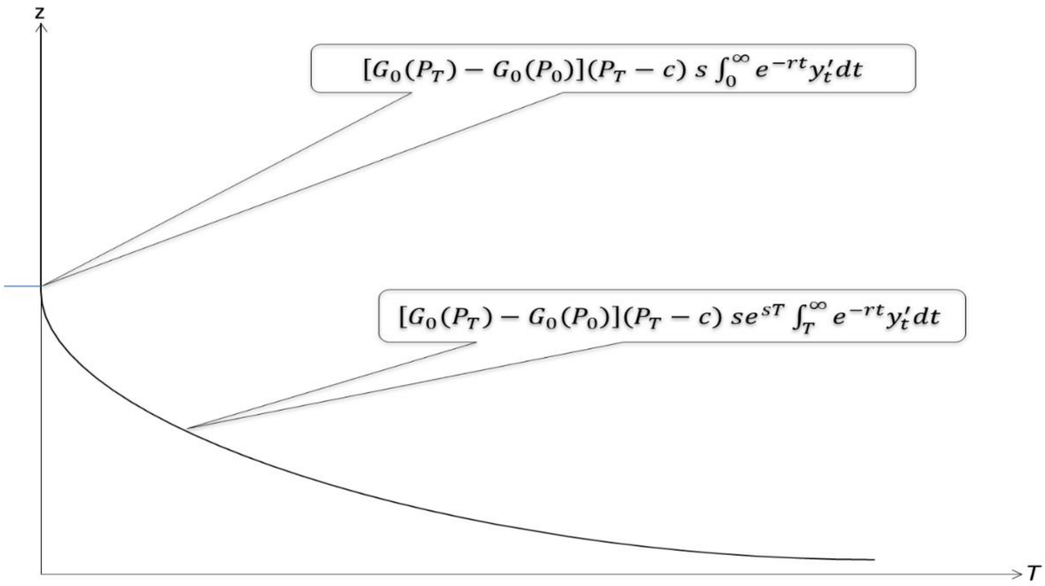

圖4.5 (4.4.1) 式第 3 項函數之圖形

資料來源：本研究整理

$$(-1) \times e^{-rT^*}(\alpha + \beta y_{T^*})(N - y_{T^*}) G_0(P_0)(P_0 - P_{T^*})$$

$$= [G_0(P_{T^*}) - G_0(P_0)](P_{T^*} - c)\left[-(r-s)e^{-(r-s)T_1} y_{T^*}\right] +$$

$$[G_0(P_{T^*}) - G_0(P_0)](P_{T^*} - c)\ se^{sT^*} \int_{T^*}^{\infty} e^{-rt} y_t' dt$$

即 (4.4.1) 式第 1 項之函數與其第 2 項及第 3 項之和的函數於 T^* 處相交（如圖 4.6 中 case 1 所示），則 T^* 為情況 1 的最佳解。

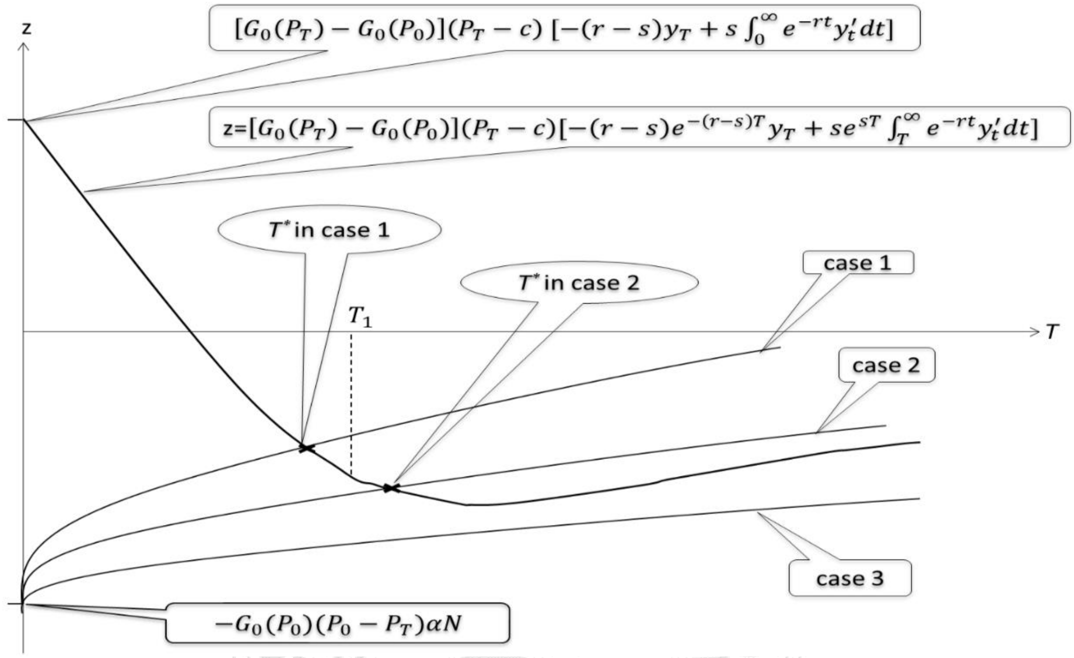

圖4.6 (4.4.1) 式最佳解 T^* 之圖解說明

資料來源：本研究整理

情況 2：

在

$$[G_0(P_{T_1})-G_0(P_0)](P_{T_1}-c)[-(r-s)e^{-(r-s)T_1}y_{T_1}]+$$

$$[G_0(P_{T_1})-G_0(P_0)](P_{T_1}-c)\ se^{sT_1}\int_{T_1}^{\infty}e^{-rt}y_t'dt>0$$

的情況下，若 T^* 滿足下式：

$$(-1) \times e^{-rT_1}(\alpha + \beta y_{T_1})(N - y_{T_1})G_0(P_0)(P_0 - P_{T_1})$$

$$= [G_0(P_{T_1}) - G_0(P_0)](P_{T_1} - c)[-(r-s)e^{-(r-s)T_1}y_{T_1}] + [G_0(P_{T_1}) - G_0(P_0)](P_{T_1} - c)\ se^{sT_1}\int_{T_1}^{\infty} e^{-rt}y_t' dt$$

則 T^* 為情況 2 的最佳解（如圖 4.6 中 case 2 所示）。

情況 3：

若 (4.4.1) 式第 1 項之函數與其第 2 項及第 3 項之和的函數不相交（如圖 4.6 中 case 3 所示），則 T^* 不存在。

綜合前一節 1、2 和 3 之分析，在 $r > s$ 情形下，(4.4.1) 式的第 1 項與第 3 項恆為正數，且第 2 項恆為負數。因此 (4.4.1) 式有機會為正數（第 1、3 項的和大於第 2 項），亦有機會為負數（第 1、3 項的和小於第 2 項）。其中，亦將有機會使得 (4.4.1) 式等於零，因此推論存在 T^*，使得 $L' = 0$，如情況 1 與情況 2 所示。因此，若 s 愈小或 r 愈大，愈支持不等式 $r > s$ 成立。s 表示成交價之傳播影響 t 時點前未實現消費者願買價格上限調整的強度。若 s 愈小，則養價高價產品成交價格資訊的傳播力量越不能影響潛在消費者上調其願買價格之上限，因此，廠商對其訂價所做的宣傳將較無法影響消費者對高價高價產品之購買意願。r 為廠商之折現率或資金成本。當廠商之資金成本較高時，為了使資金快速回收並使利潤極大化，可在 $t \in [0, T^*)$ 期間內進行養價，並在 $t \in [T^*, \infty)$ 進行降價促銷，其訂價為 P_{T^*}。資金成本較高之廠商通常為中小型公司組織。

相反地，在 $r \leq s$ 情形下，第二項恆為正數，則 (4.4.1) 式 $L'(T) > 0, \forall T$ 為增函數。因而使得 L 值最佳化之價格策略為：在 $t \in [0, \infty)$ 期間，廠商始終維持訂價為 P_0，不必進行降價促銷即可使其折現利潤最大化。亦即在 $r \leq s$ 的情況下，最佳化養價期間是不存在的，因為當 $r \leq s$ 時，T^* 將趨近於 ∞。當 s 愈大或 r 愈小，愈支持不等式 $r \leq s$ 成立。所以養價高價產品成交價格資訊的傳播影響力量越大，將越能影響潛在消費者上調其願買價格之上限，進而增加消費者對高價高價產品之購買意願。因此，廠商必須對其銷訂價格作更多的宣傳。當廠商之資金成本較低時，亦較有能力在不進行降價的情況之下來從事高價高價產品之銷售。而能擁有較低資金成本之廠商通常為中大型公司組織。進一步分析，因 $T^* \to \infty$，則 (4.3.11) 式中之 L_2、L_3 將不必再討論。可將其改寫為：

$$\text{Max } L = L_1 - \int_0^{\infty} e^{-rt} A dt \tag{4.4.4}$$

在 (4.4.4) 式中，考慮 L 對 P_0 進行偏微分，可得

$$0 = \frac{\partial L}{\partial P_0}\Big|_{P_0 = P_0^*} = \left[\int_0^{\infty} e^{-rt} y_t' dt\right] [G_0(P_0) - g_0(P_0)(P_0 - c)]$$

移項得

$$G_0(P_0^*) = g_0(P_0^*)(P_0^* - c) = -G_0'(P_0^*)(P_0^* - c)$$

即

$$\frac{-G_0'(P_0^*)}{G_0(P_0^*)} = \frac{1}{P_0^* - c}$$

其中 $\frac{-G_0'(P_0^*)}{G_0(P_0^*)}$ 為臨櫃購買比例對訂價 P_0 變動百分比。若邊際貢獻 $(P_0^* - c)$ 越大，則臨櫃購買比例對訂價 P_0 變動百分比就越小，即消費者購買比例較不受價格變動之影響，亦可以引申為無進行降價促銷之必要。

4.5 模式最佳解敏感性分析

本研究所提出的養價模式旨在追求養價的利潤最大化。本研究將實務上常見之養價措施，藉由使用微分方程的數學工具，製作成可以具體討論的模式。為了方便分析，本文將消費者依其特性分成四類：潛在消費者、t 時點前臨櫃消費群、 t 時點前已購買消費群、及 t 時點前未購買消費群。再以 t 時點前臨櫃消費群數 y_t 來取代銷售數量 x_t，來修正 Bass 擴散模型對擴散傳染力的衡量方式。並建立消費者願買（且能買）價格上限值為 z 的分配密度函數，$g_0(z)$，用以估計潛在臨櫃消費者的購買比例，$G_0(P)$，而推導出在各時點該高價產品之銷售量。並以所定義的訂價策略來推算各階段之銷售收入現金流量，進一步建構各階段養價模式之折現利潤的數學模式。利用微分技巧來分析在各種不同情況下，是否存在養價的最佳期間。

本文先考慮在 $r > s$ 假設情形下，提出如何尋求養價的最佳養價期間應在特定條件下存在最佳養價期間 T^*，並在 $t \in [T^*, \infty)$ 尋求最佳訂價 P_{T^*}，使得本養價模式在最佳養價策略 (T^*, P_T^*) 下達到折現利潤最大化。相反地，在 $r \leq s$ 的假設情形下，可證明最佳養假期間 $[T^*, \infty)$ 之 T^* 必須趨近於無窮大，即 $T^* \to \infty$，亦即不存在最佳養價期間 T^*，廠商

不必養價亦不必進行降價促銷即可達到折現利潤最大化的目標。

本養價擴散模式，有三個決策變數：上市時養價水準 P_0、養價時間長度 T 與促銷價格 P_T，其最佳解可以表示為 T^*。本章的討論重點在於 T^* 是否存在的問題上，而未對 P_0^*, P_T^* 之性質及彼此關係作分析。如果再進一步對 (P_0^*, T^*, P_T^*) 三者的關連性作深層的探討，當發現更多的性質及其管理意涵。

第五章 結論

本研究所提出的養價問題之養價模式的目標函數為廠商追求利潤的最大化。本文將實務上常見之養價措施，藉由使用數學方程式將其製作成可以具體討論的模式。為了方便分析，本文將任一時點 t 之消費者依其購買產品與否之特性分成四類：潛在消費者，t 時點前臨櫃消費群，t 時點前已購買消費群及 t 時點前未購買消費群。其中以 t 時點前累積臨櫃消費群數 y_t 來取代累積銷售數量 x_t，採用擴充 Bass 擴散模型對擴散傳染力的衡量方式。並建立消費者願買價格上限值為 z 的分配機率密度函數，$g_0(z)$，用以估計潛在臨櫃消費者的購買比率，$G_0(P)$，而推導出在各時點該產品之銷售量。並以所定義的訂價策略來推算各階段之銷售收入現金流量，進一步建構各階段養價模式之折現利潤的數學模式。利用微分技巧來分析在各種情況下，探討模式特性及其管理意涵。

5.1 結論

本研究針對於那些，因不易移動或穿戴，使得產品本身不能展示在大眾眼前的產品，諸如不動產、遊樂園區、和大型傢俱等等，進行最佳化訂價策略的探討。本文採用擴充的 Bass 擴散模式，將單一擴散力量來源，擴充成雙重擴散力量來源：臨櫃潛在消費人數與售價水準等兩股力量。並結合常態分配的消費者願買價格上限之機率密度分配假設，以估計各時點之銷售數量，而求解銷售利潤的最佳化。為使分析更簡潔，本文依兩種情境假設分別來探討廠商如何分別決定訂價 P_0 ， P_T 及 T，以使其折現利潤達最大化水準。並在養價模式推導過程中討論各個相關變數之管理意義與使用，以作為實務應用。茲依個別情境推導分析綜合其研究結論如

下：

5.1.1 兩時段訂價模式最佳解性質與管理意涵

兩時段訂價模式主要討論臨櫃潛在消費群的擴散力量來源對產品成交價信息擴散的影響。產品成交價信息的擴散會隨時間經過而影響產品銷售數量。單一時段訂價模式為兩時段訂價模式的特例。從養價時間區間給定且可針對兩時段訂定不同訂價水準之條件下，研究發現兩時段訂價模式最佳解性質為第二時段訂價應低於第一時段之訂價。因無限時段訂價模式可分割成許多連續相鄰的兩時段訂價模式，推論廠商各時點最佳訂價控制應隨時間經過而遞減。即任一時點之最佳訂價可能隨時間經過維持不動，但絕不會隨時間經過而嚴格增加。

5.1.2 養價擴散模式最佳解性質與管理意涵

養價擴散模式，除採用臨櫃潛在消費群人數的擴散力量來源外，亦將成交價格信息如何影響消費者願買價格上限的調整幅度納入討論。因此兩時段訂價模式為養價擴散模式之特例。

在 $r > s$ 情形下，本研究所提出的養價擴散模式在此特定條件下存在最佳養價期間 T^*，並在 $t \in [T^*, \infty)$ 進行降價促銷，其促銷訂價為 P_T^*，能使得本養價期間模式之情境達到折現利潤最大化的目標。一般而言，當廠商單位資金在單位時間內的成本（利率） r 大於成交價傳播影響消費者願買價格上限調整幅度 s 時，上述 T^* 成本必存在。亦即當 $r > s$ 時，廠商在折現利潤最大化考量下，應採取養價擴散策略。此條件適用資金成本較高且較缺乏行銷資源以影響消費者願買價格上限調整幅度的中小企業。

相反地，若 $r \leq s$，廠商應始終維持原單一最佳訂價，不必進行養價擴散策略即可使其折現利潤最大。此條件適用於資金成本較低且其行銷資源較充足有能力影響消費者願買價格上限調整幅度的之大型企業。在 $r \leq s$ 的情形下，T^* 趨近於 ∞，即不存在最佳養價期間 T^*。

5.2 研究限制

為使分析更精簡，本論文之分析植基於各種假設與條件，如新產品成交價信息乃依擴充 Bass 模式來擴散的假設、消費者願買價格上限之機率密度分配為常態分配的假設、養價期間給定條件下的最佳訂價推論和價格給定的條件下最佳養價期間的推論等。於管理實務的應用上，在考量實際狀況與假設、條件之變異的情況下，本養價擴散模式之養價促銷訂價策略應做必要與適度地調整與修正。

參考文獻

1. Arndt, J. (1967), Role of product-related conversations in the diffusion of a new product, Journal of Marketing Research, Vol.4, pp.291-295.
2. Adaval, R. & Monroe, K.B. (2002), Automatic construction and use of contextual information for product and price evaluations, Journal of Consumer Research, Vol.28, pp.572-588.
3. Bass, F.M. & Bultez, A.V. (1982), A note on optimal strategic pricing of technological innovations, Marketing Science, Vol.1, pp.371-378.
4. Bass, F.M. (1969), A new product growth for model consumer durables, Management Science, Vol.15, No.5, pp.215-227.
5. Bass, F.M. (1980), The relationship between diffusion rates, experience curves, and demand elasticity's for consumer durable technological innovations, Journal of Business, Vol.53, pp.51-67.
6. Bass, F.M. (2004), Comments on: a new product growth for model consumer durables, Management Science, Vol.50, No.12, pp.1833-1840.
7. Biswas, A. & Blair, E.A. (1991), Contextual effects of reference price in retail advertisement Journal of Marketing, Vol.55, pp.1-12.
8. Briesch, R.A., Krishnamurthi, L., Mazumdar, T. & Raj, S.P. (1997), A comparative analysis of reference price models, Journal of Consumer Research, Vol.24, pp.202–214.
9. Brown, C.L. & Carpenter, G.S. (2000), Why is the trivial important? a reason-based account for the effects of trivial attributes on choice, Journal of Consumer Research, Vol.26, pp.372-385.
10. Catry, B. (2003), The great pretenders: the magic of luxury goods, Business Strategy Review, Vol.14, No.3, pp.10-17.
11. Chen, M.S. & Chen, C.B. (1998a), The study of dynamic demand function

and continuous optimal price control model, The Indian Journal of Economics, Vol.312, pp.65-80.

12. Chen, M.S. & Chen, C.B. (1998b), A dynamic model of the effect of consumer's internal reference price adjustment on demand function shifting, Journal of Information & Optimization Sciences, Vol.19, No.3, pp.337-352.
13. Chen, M.S. & Chen, C.B. (2003), The effect of the consumer's internal reference prices adjusted on consumer purchase behavior and manufacturer's pricing strategy, Journal of National Kaohsiung of Applied Sciences, pp.48-72.
14. Chen, M.S., Li, M.J. & Wang, H.B. (2016), The optimal pricing model for walk-in potential customers with extending bass diffusion model, International Journal of Organizational Innovation, Vol.8 No.3, pp.125-136.
15. Dodds, W.B. & Monroe, K.B. (1985), The effect of brand and price information on subjective product evaluations, Advances in Consumer Research, Vol.12, pp.85-90.
16. Dolan, R.J. & Jeuland, A.P. (1981), Experience curves and demand models: implications for optimal pricing strategies, Journal of Marketing, Vol.45, pp.52-62.
17. Elaad, E., Sayag, N. & Ezer, A. (2010), Effects of anchoring and adjustment in the evaluation of product pricing, Psychological Reports, Vol.107, pp.58-60.
18. Engel, J.F., Blackwell, R.D. & Miniard, P.W. (1993), Consumer Behavior (7th ed.). Fort Worth: Dryden Press.
19. Feichinger, G. (1982), Optimal pricing in diffusion model with concave price-dependent market potential, Operations Research Letters, Vol.1, pp.236-240.
20. Finkelman, D.P. (1993), Crossing the 'zone of indifference', Marketing

Management, Vol.12 No.3, pp.22-32.

21. Frank, R.E., Massy, W.F. & Morrison, D.G. (1964), The determinants of innovative behaviour with respect to a branded and frequently purchased food products, Proceedings of the American Marketing Association, L. G. Smithed. Chicago: American Marketing Association, pp.312-323.
22. Gatignon, H. & Robertson, T.S. (1991), Innovative decision processes. In T. S. Robertson, & H. H. Kassarjian (Eds.), Handbook of Consumer Behavior, pp.316-348, Englewood Cliffs, NJ: Prentice-Hall.
23. Groth, J.C., & McDaniel, S.W. (1993), The exclusive value principle: the basis for prestige pricing. Journal of Consumer Marketing, Vol.10 No.1, pp.10-16.
24. Homburg, C., Koschate, N. & Hoyer, W.D. (2005), Do satisfied customers really pay more? a study of the relationship between customer satisfaction and willingness to pay, Journal of Marketing, Vol.69, pp.84-96.
25. Horsky, D. & Simon, L.S. (1983), Advertising and the diffusion of new products, Marketing Science, Vol.2 No.1, pp.1-17.
26. Horsky, D. (1990), A diffusion model incorporating product benefits, price, income and information, Marketing Science, Vol.9 No.4, pp.342-365.
27. Huber, J. & McCann, J. (1982), The impact of inferential beliefs on product evaluations, Journal of Marketing Research, Vol.21, pp.324-333.
28. Hwanga, J. (2014), Examining strategies for maximizing and utilizing brand prestige in the luxury cruise industry, Tourism Management, Vol.40, pp.244–259.
29. Jacobson, R. & Obermiller, C. (1990), The formation of expected future price: a reference price for forward-looking consumers, Journal of consumer Research, Vol.16, pp.420-32.
30. Jain, D.C. & Rao, R.C. (1990), Effect of price on the demand for durables:

modeling, estimation and findings, Journal of Business and Economic Statistics, Vol.8, No.2, pp.163-170.

31. Kalish, S. (1983), Monopolist pricing with dynamic demand and production cost, Marketing Science, Vol.2, pp.135-160.

32. Kalish, S. (1985), A new product adoption model with pricing, advertising and uncertainty, Management Science, Vol.31, pp.1569-1585.

33. Kalish, S. & Lilien, G.L. (1986), A market entry timing model for new technologies, Management Science, Vol.32, pp.194-205.

34. Kalish, S. & Sen, S.K. (1986), Diffusion Models and the Marketing Mix for Single Products, in Innovation Diffusion Models of New Product Acceptance, Mahajan V. Wind Y. eds. Cambridge, MA：Ballinger Publishing Company.

35. Kamakura, W.A. & Balasubramanian, S.K. (1988), Long-term view of the diffusion of durables: a study of the role of price and adoption influence processes via tests of new models, International Journal of Research in Marketing, Vol.5, pp.1-13.

36. Kamins, M.A., Dreze, X. & Folkes, V.S. (2004), Effects of seller-supplied prices on buyers' product evaluations: reference prices in an internet auction context. Journal of Consumer Research, Vol.30, No.3, pp.622-628.

37. Kim, N., Bridges, E. & Srivastava, R.K. (1999), A simultaneous model for innovative product category sales diffusion and competitive dynamics, International Journal of Research in Marketing, Vol.16, pp.95-111.

38. King, C.W., Jr. (1963), Fashion adoption: a rebuttal to the 'trickle down' theory. Proceedings of the American Marketing Association. S. A. Greyser Ed. Chicago: American Marketing Association, pp.108-125.

39. Kniesner, T.J. (2001), Luxury fever. National Tax Journal, Vol.54, No.2, pp.425

40. Kotler, P. (2000), Marketing Management (10th ed.). Prentice-Hall, New Jersey.

41. Kotler, P., Ang, S.H. & Leong, S.M. (1999), Marketing Management: an Asian Perspective (2nd ed.), Singapore: Prentice Hall, Inc.

42. Krishna, A. (1991), Effect of dealing patterns on consumer perceptions of deal frequency and willingness to pay, Journal of Marketing Research, Vol.30, pp.441-451.

43. Lee, H.C., Lee, J.M. & Seo, J.H. (2011), Design and improvement of product using intelligent function model based cost estimating, Expert Systems with Applications, Vol.38, pp.3131-3141.

44. Lee, P.M.H. & Wong, K.C. (2005), Revealed preference and differentiable demand, Economic Theory, Vol.25, pp.855-870.

45. Lichtenstein, D.R., Burton, S. & Karson, E.J. (1991), The effect of semantic cues on consumer perceptions reference price ads, Journal of Consumer Research, Vol.18, pp.380-391

46. Liu, S.T. (2007), A computational method for the maximization of long-run and short-run profit, Applied Mathematics and Computation, Vol.186, pp.1104-1112.

47. Lu, Y.C. (2012), Dynamic Demand Function Formation Affected by Creative Products Historical Deal Price Track, A Dissertation for the Degree of Doctor of Philosophy, Ph.D. Program in Management Science, Department of Business Administration, Nan-Hua University, Taiwan.

48. Mahajan, V. & Wind, Y. (1986), Innovation Diffusion Models of New Product Acceptance：a Re-examination, in Innovation Diffusion Models of new product Acceptance. Czmficbd, MA: Ballinger Publishing Company.

49. Mahajan, V., Muller, E. & Bass, F.M. (1990), New product diffusion

models in marketing: a review and directions for research, Journal of Marketing, Vol.54, pp.1-26.

50. Massowa, M.V. & Hassinib, E. (2013), Pricing strategy in the presence of reference prices with thresholds, Journal of Revenue and Pricing Management, Vol.12, pp.339-359.

51. Mazumdar, T. & Papatla, P. (2000), An investigation of reference price segments. Journal of Marketing Research, Vol.37, pp.246–259.

52. Monroe, K.B. (2003), Pricing: Making Profitable Decisions, McGraw-Hill Irwin: New York.

53. Moon, S., Russell, G.J. & Duvvuri, S.D. (2006), Profiling the reference price consumer, Journal of Retailing, Vol.82, pp.1-11.

54. Noble, P.M. & Gruca, T.S. (1999), Industrial pricing: theory and managerial practice Marketing Science, Vol.18, No.3, pp.435-454.

55. Nowlis, S.M. & Simonson, I. (1996), The effect of new product features on brand choice, Journal of Marketing Research, Vol.35, pp.36-46.

56. Okonkwo, U. (2009), Sustaining the luxury brand on the internet, Journal of Brand Management, Special Issue: Luxury Brands, Vol.16, No.5-6, pp.302-310.

57. Parker, P. & Gatignon, H. (1994), Specifying competitive effects in diffusion models: an empirical analysis, International Journal of Research in Marketing, Vol.11, No.1, pp.17-39.

58. Putler, D.S. (1992), Incorporating reference price effects into a theory of consumer choice, Marketing Science, Vol.11, No.3, pp.287-309.

59. Radon, A. (2012), Luxury brand exclusivity strategies-an illustration of a cultural collaboration, Journal of Business Administration Research, Vol.1, No.1, pp.106.

60. Rajendran, K.N. & Tellis, G.J. (1994), Contextual and temporal components of reference price, Journal of Marketing, Vol.58, pp.22-34.

61. Rao, A.R. & Monroe, K.B. (1988), The moderating effect of prior knowledge on cue utilization in product evaluations, Journal of Consumer Research, Vol.15, pp.253-264.

62. Reichheld, F., Sasser, Jr. & Earl, W. (1990), Zero defections: quality comes to services, Harvard Business Review, Vol.68, pp.105-111.

63. Robinson, B. & Lakhani, C. (1975), Dynamic price models for new product planning. Management Science, Vol.10, pp.1113-1122.

64. Rogers E.M. (1995), Diffusion of Innovations (4th ed.). New York: The Free Press.

65. Samli, A.C. (2013), Marketing strategy for global luxury products, International Consumer Behavior in the 21st Century, Vol.2013, pp.143-151.

66. Shankar, V. & Bolton, R. N. (2004), An empirical analysis of determinants of retailer pricing strategy, Marketing Science, Vol.23, No.1, pp.28-49.

67. Shih, Y.T. (2008), Role of Price in Sales Rates over Time: A Diffusion Model for New Products. A Dissertation for the Degree of Doctor of Philosophy, Ph.D. Program in Management Science, Department of Business Administration, Nan-Hua University, Taiwan.

68. Silk, A. J. (1966), Overlap among self-designated opinion leaders: a study of selected dental products and services, Journal of Marketing Research, Vol.3, pp.255-259.

69. Sultan, F., Farley, J.U. & Lehmann, D.R. (1990), A meta-analysis of applications of diffusion models, Journal of Marketing Research, Vol.27, pp.70-7.

70. Sultan, F., Farley, J.U. & Lehmann, D.R. (1996), Reflections on：a meta-analysis of applications of diffusion models, Journal of Marketing

Research, Vol.33, pp.247-49.

71. Teng, J.T. & Thompson, G.L. (1983), Oligopoly models for optimal advertising with production cost obey a learning curve, Management Science, Vol.29, No.9, pp.1087-1101.
72. Thompson, G.L. & Teng, J.T. (1984), Optimal pricing and advertising policies for new product oligopoly model, Marketing Science, Vol.3, No.3, pp.148-168.
73. Valente, T.W. (1995), Network Models of the Diffusion of Innovation, Cresskill, N.J., Hampton Press.
74. Wang, H.B, Chen, M.S. & Li, M.J. (2016), Two-period pricing model for walk-in potential consumers with normal distribution of the price of their willing to buy, International Journal of Information and Management Sciences, Vol.27, No.3, pp.283-298.
75. Wetlaufer, S. (2001), The perfect paradox of star brands: an interview with ARNAULT of LVMH, Harvard Business Review, Vol.79, No.9, pp.116-123.
76. Winner, R.S. (1986). A reference price model of brand choice for frequently purchased products, Journal of Consumer Research, Vol.13, pp.200-256.
77. Zheng, J.H., Shen, B., Chow, P.S. & Chiu, C.H. (2013), The impact of the strategic advertising on luxury fashion brands with social influences, Mathematical Problems in Engineering, Vol.2013, Article ID 534605, 16 pages, 2013. doi:10.1155/2013/534605
78. Ziamou, P. & Ratneshwar, S. (2003), Innovations in product functionality: when and why are explicit comparisons effective? Journal of Marketing, Vol.67, pp.49-61.
79. Zirger, B. & Maidique, M. (1990), A model of new product development an empirical test, Management Science, Vol.36, No.7, pp.867-886.

附錄 一

$$y_t' = (\propto + \beta y_t)(N - y_t) \tag{A.1.1}$$

將式(A.1.1)移項後，得

$$1 = \frac{y_t'}{(\alpha+\beta y_t)(N-y_t)} = \quad \frac{1}{\alpha+\beta N}\left[\frac{y_t'}{\frac{\alpha}{\beta}+y_t} + \frac{y_t'}{N-y_t}\right]$$

右式對 t 積分，得

$$t + k = \frac{1}{\alpha+\beta N} ln \frac{\frac{\alpha}{\beta}+y_t}{N-y_t} \text{，其中 } k \text{ 為積分常數} \tag{A.1.2}$$

因為計畫剛啟動時（及新產品剛上市發表），累積臨櫃人數為 0（即 $y(0) = 0$），故整理後式(A.1.2)成為：

$$k = \frac{1}{\alpha+\beta N} ln(\frac{\alpha}{\beta N})$$

帶入式(A.1.2)，得

$$t + \frac{1}{\alpha+\beta N} ln(\frac{\alpha}{\beta N}) = \frac{1}{\alpha+\beta N} ln \frac{\frac{\alpha}{\beta}+y_t}{N-y_t}$$

右式等號兩邊各乘以 $(\alpha + \beta N)$，得

$$(\alpha+\beta N)t+ln(\frac{\alpha}{\beta N})=ln\frac{\frac{\alpha}{\beta}+y_t}{N-y_t}$$

右式等號兩邊各去除自然對數，得

$$\frac{\alpha}{\beta N}e^{(\alpha+\beta N)t}=\frac{\frac{\alpha}{\beta}+y_t}{N-y_t}$$

右式等號兩邊各乘以 $(N-y_t)$，得

$$\frac{\alpha}{\beta N}(N-y_t)\,e^{(\alpha+\beta N)t}=\frac{\alpha}{\beta}+y_t$$

右式經整理後，得

$$\frac{\alpha}{\beta}e^{(\alpha+\beta N)t}-\frac{\alpha}{\beta N}\ \ e^{(\alpha+\beta N)t}\,y_t=\frac{\alpha}{\beta}+y_t$$

右式經移項整理後，得

$$\frac{\alpha}{\beta}[\,e^{(\alpha+\beta N)t}-1]=[1+\frac{\alpha}{\beta N}e^{(\alpha+\beta N)t}]y_t$$

右式經移項整理後，求得於時點 t 之累積臨櫃人數，表示如式(A.1.3)

$$y_t=\frac{\frac{\alpha}{\beta}[e^{(\alpha+\beta N)t}-1]}{1+\frac{\alpha}{\beta N}e^{(\alpha+\beta N)t}} \tag{A.1.3}$$

式(A.1.3)可進一步化簡為如式(A.1.4)

$$y_t = N - \frac{\frac{\alpha}{\beta}+N}{1+\frac{\alpha}{\beta N}e^{(\alpha+\beta N)t}} \tag{A.1.4}$$

將(A.1.4)對 t 微分，得

$$y_t' = \frac{\left(\frac{\alpha}{\beta}+N\right)\frac{\alpha}{\beta N}(\alpha+\beta N)e^{(\alpha+\beta N)t}}{\left[1+\frac{\alpha}{\beta N}e^{(\alpha+\beta N)t}\right]^2} \tag{A.1.5}$$

令 $t=0$，代入式(A.1.5)，得

$$y_0' = \frac{\left(\frac{\alpha}{\beta}+N\right)\frac{\alpha}{\beta N}(\alpha+\beta N)}{(1+\frac{\alpha}{\beta N})^2}$$

$$= \frac{(\frac{\alpha}{\beta N}+1)\frac{\alpha}{\beta}(\alpha+\beta N)}{(1+\frac{\alpha}{\beta N})^2}$$

$$= \frac{\frac{\alpha}{\beta}(\alpha+\beta N)}{1+\frac{\alpha}{\beta N}}$$

$$= \frac{\frac{\alpha^2+N}{\beta}}{\frac{\beta N+\alpha}{\beta N}}$$

$$= \frac{\alpha^2 N+\alpha\beta N^2}{\beta N+\alpha}$$

$$= \frac{\alpha N(\alpha+\beta N)}{\alpha+\beta N}$$

$$= \alpha N$$

由以上演算，經整理後，得(A.1.6)

$$y_0' = \alpha N \tag{A.1.6}$$

附錄 二

$$y_t = N - \frac{\frac{\alpha}{\beta}+N}{1+\frac{\alpha}{\beta N}e^{(\alpha+\beta N)\mathrm{t}}} \geq 0, \quad \forall t \tag{A.2.1}$$

$$y_t' = \frac{\left(\frac{\alpha}{\beta}+N\right)\frac{\alpha}{\beta N}(\alpha+\beta N)e^{(\alpha+\beta N)\mathrm{t}}}{\left[1+\frac{\alpha}{\beta N}e^{(\alpha+\beta N)\mathrm{t}}\right]^2} \geq 0,$$

$$\forall t \ \ [=>\lim_{t\to 0} y_t' = (\frac{\alpha}{\beta} + y_0)(\alpha + \beta N) > 0] \tag{A.2.2}$$

$$\ln y_t' = \ln[\left(\frac{\alpha}{\beta} + N\right)\frac{\alpha}{\beta N}(\alpha + \beta N)] + (\alpha + \beta N)t - 2\ln\left[1 + \frac{\alpha}{\beta N}e^{(\alpha+\beta N)\mathrm{t}}\right]$$

微分得：

$$\frac{y_t''}{y_t'} = (\alpha + \beta N) - 2\frac{\frac{\alpha}{\beta N}(\alpha+\beta N)e^{(\alpha+\beta N)\mathrm{t}}}{1+\frac{\alpha}{\beta N}e^{(\alpha+\beta N)\mathrm{t}}}$$

$$= (\alpha + \beta N)[1 - \frac{2\frac{\alpha}{\beta N}e^{(\alpha+\beta N)\mathrm{t}}}{1+\frac{\alpha}{\beta N}e^{(\alpha+\beta N)\mathrm{t}}}]$$

$$= (\alpha + \beta N)[\frac{1-\frac{\alpha}{\beta N}e^{(\alpha+\beta N)\mathrm{t}}}{1+\frac{\alpha}{\beta N}e^{(\alpha+\beta N)\mathrm{t}}}] \tag{A.2.3}$$