

南華大學社會科學院國際事務與企業學系亞太研究碩士班

碩士論文

Master Program in Asia-Pacific Studies

Department of International Affairs and Business

College of Social Sciences

Nanhua University

Master Thesis

運用 82 年版國小數學教材於等值分數補救教學之行動研究

—以台灣南投縣國小五年級學生為例

An Action Research on Using the 1993 Edition of Elementary
School Mathematics Textbook in Remedial Instruction of
Equivalent Fraction: A Case Study of Fifth Graders in Nantou,
Taiwan

郭淑芬

Shu-Fen Kuo

指導教授：張子揚 博士

Advisor: Tzu-Yang Chang, Ph.D.

中華民國 110 年 6 月

June 2021

南華大學

國際事務與企業學系亞太研究碩士班

碩士學位論文

運用82年版國小數學教材於等值分數補救教學之行動研究
—以台灣南投縣國小五年級學生為例

An Action Research on Using the 1993 Edition of Elementary
School Mathematics Textbook in Remedial Instruction of
Equivalent Fraction: A Case Study of Fifth Graders in Nantou,
Taiwan

研究生：郭淑芬

經考試合格特此證明

口試委員：

張子揚

胡翰軍

李佩珊

指導教授：

張子揚

系主任(所長)：

張心怡

口試日期：中華民國 1 1 0 年 0 6 月 2 4 日

摘要

本研究以南投縣偏鄉地區一所國小四升五年級學習低落學生為研究對象，人數共 5 人。旨在探討教師運用 82 年版國小數學教材，於國小四升五年級學童於四年級數學「等值分數」補救教學的教學歷程，探討學生學習分數相關概念遭遇的困難及解題策略。本研究規劃了數學「等值分數」概念課程，以多元表徵、對話教學等鷹架策略為主要教學策略，由研究者擔任教學者，進行為期七天，每天二堂課的補救教學活動，由研究者針對個別學生數學分數概念與解題策略，進行個別化的補救教學，進而提升學生學習的成效。

本研究以質性為主進行資料分析。研究者依據九年一貫課程綱要中年級分數概念的能力指標設計前測卷，對五位五年級學童進行施測，診斷分析學童可能的學習困難，再依據 82 年版課程教材教學活動進行個別的補救教學計畫。在七天的補救教學後進行後測，並以課中與課後之學習檢核表、教學省思記錄、學生心得回饋及訪談等質性資料探討補救教學實施的歷程以及成效。經上述行動研究後獲致下列研究結果：

- (一)學童在補救教學之後，等值分數概念有明顯的進步。
- (二)透過多元表徵-畫圖與對話教學，能提供有效的鷹架，
有助於學生釐清迷思，了解等值分數相關概念。
- (三)運用 82 年版國小數學教材，於五年級學童等值分數概念「等
值分數」的補救教學，能提高學習成效，表現分數有顯著提升。

關鍵字：82年版國小數學課程、等值分數、補救教學、學習低落、行動研究

Abstract

This study takes five students of an elementary school in a rural area of Nantou County as the objects of study. These students are facing the problems of low learning capacity. The purpose is to look into the remedial teaching process of teachers using the 1993 edition of elementary school mathematics textbooks to teach the “equivalent fractions” for fourth graders going on to the fifth grade, and explore the difficulties the students face in learning the mathematic fractions and the problem solving strategy. This research scheduled a mathematics curriculum of the “equivalent fractions” concept, featured with the scaffolding strategies such as multiple representations and dialogue teaching. The author of this paper served as the teacher for a 7-day remedial teaching with two sessions each day. One-on-one remedial teaching of the mathematic fraction concept and problem solving strategy was given to enhance the students’ learning capacity.

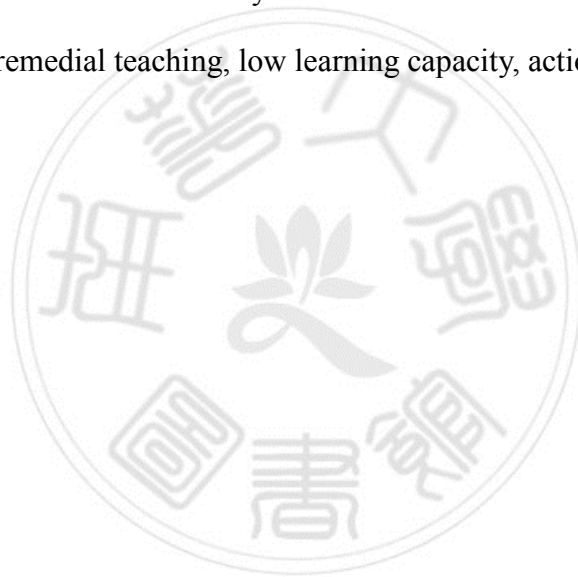
This research took qualitative data analysis. The author designed a pre-test exam based on the ability indicators set in the Grade 1-9 Curriculum Guidelines for the fraction concept of middle graders, and the test was given to fifth graders in order to analyze learning difficulties the students may face, and then one-on-one remedial teaching was given to the students based on the 1993 edition of curriculum and teaching materials. After seven days of the remedial teaching, a post-test was given, and qualitative data such as in-class and after-class learning checklists, teaching reflection records, student feedback and interviews were used to explore the remedial teaching process and its efficacy. Through the above action research, the following results have been reached:

(1) After receiving the remedial teaching, the students made significant progress on the concept of equivalent fraction.

(2) Multiple representations such as drawing and dialogue teaching can provide effective scaffolding schemes to help students clarify their myths about equivalent fraction and get a clear concept.

(3) Using the 1993 edition of elementary school mathematics textbooks for the remedial teaching of “equivalent fraction” for fifth grade students can significantly improve the students’ learning capacity.

Keywords: 1993 edition of elementary school mathematics curriculum, equivalent fraction, remedial teaching, low learning capacity, action research



目錄

摘要.....	I
Abstract.....	II
目錄.....	IV
表目錄.....	VI
圖目錄.....	VII
第一章 緒論.....	01
第一節 研究動機.....	01
第二節 研究問題與研究假設.....	04
第三節 研究設計.....	07
第四節 可能貢獻.....	13
第二章 文獻回顧.....	14
第一節 補救教學.....	14
第二節 學童分數概念的發展.....	24
第三節 國小分數課程.....	34
第四節 82年版數學分數教材.....	37
第三章 研究途徑與研究方法.....	41
第一節 研究途徑.....	41
第二節 研究方法.....	46
第三節 研究對象.....	47
第四節 研究工具.....	50
第五節 資料的蒐集分析.....	54
第四章 研究分析與發現.....	56
第一節 學童在分數補救教學前測的結果分析.....	56
第二節 補救教學實施歷程之探討.....	60

第三節 補救教學後學習成效之探討.....	83
第五章 研究結論.....	85
第一節 研究發現.....	85
第二節 研究建議.....	91
參考文獻	93
中文部分.....	93
英文部分.....	98



表目錄

表 2-2-1 分數課程能力指標.....	35
表 2-2-2 分數課程分年細目.....	36
表 3-4-1 個案基本資料表.....	47
表 3-5-1 中年級等值分數數學概念及 82 年版數學教材對照表圖表..	51
表 3-5-2 分數補救教學活動摘要表.....	52
表 3-6-1 研究目的與資料來源對照表.....	55
表 4-1-1 前測學童答對題數與答對率統計表.....	56
表 4-2-1-1 第一、二節課中解題多元表徵檢核表.....	61
表 4-2-1-2 第一、二節課教學日誌表.....	61
表 4-2-2-1 第三、四節課中解題多元表徵檢核表.....	63
表 4-2-2-2 第三、四節課教學日誌表.....	64
表 4-2-3-1 第五、六節課中解題多元表徵檢核表.....	66
表 4-2-3-2 第五、六節課教學日誌表.....	66
表 4-2-4-1 第七、八節課中解題多元表徵檢核表.....	70
表 4-2-4-2 第七、八節課教學日誌表.....	70
表 4-2-5-1 第九、十節課中解題多元表徵檢核表.....	72
表 4-2-5-2 第九、十節課教學日誌表.....	73
表 4-2-6-1 第十一、十二節課中解題多元表徵檢核表.....	75
表 4-2-6-2 第十一、十二節課教學日誌表.....	75
表 4-2-7-1 第十三、十四節課中解題多元表徵檢核表.....	78
表 4-2-7-2 第十三、十四節課教學日誌表.....	79
表 4-3-1 前測與後測學童答對題數與答對率之比較統計表.....	83

圖目錄

圖 1-3-1 研究架構圖.....	08
圖 1-3-2 補救教學研究流程圖.....	12
圖 3-1-1 表徵系統圖.....	43
圖 4-1-1 前測學童答對率長條圖.....	57
圖 4-3-1 前測與後測學童答對率之比較長條圖.....	84



第一章 緒論

國小分數概念學習在數學學習領域中扮演著舉足輕重的角色，九年一貫課程從三年級就有分數的課程，而十二年課綱中，提早在二年級的課程設計了單位分數的認識。分數在數學中是複雜但重要的概念，卻也是多數小學學童在學習數學時，最感困難的地方，若是一開始的概念未打好基礎，一知半解、似懂非懂，就會影響之後的概念發展，而這樣的問題往往也讓學童在數學的學習信心大受打擊，造成學習動機低落。本研究旨在探討四升五年級學生在中年級分數-「等值分數」的學習困難，針對個別學生進行個別的補救教學方案，找出方法提升學生在此部分的學習成效。

本章緒論旨在闡述本研究之動機與目的，並對研究中的名詞加以界定，共分四節：第一節為研究動機；第二節為研究目的和研究問題；第三節為研究範圍與限制；第四節為名詞釋義，茲分節說明如下：

第一節 研究動機

分數概念的學習在國小的數學學習領域中扮演著舉足輕重的角色，數學為螺旋式的課程架構，順應不同的學習階段，概念隨之加深與加廣，每一個階段的學習都是下一個階段的重要基礎，學童學習中產生學習困難，便會影響之後的學習。所以教師應當給予適當的引導與協助，幫助學童順利完成學習，因此足見補救教學在有效學習上扮演極重要的角色。

我國自民國 95 年以來推動「攜手計畫-課後扶助方案」，補助各地方政府全面推動弱勢且學業落後學生之補救教學，提供學習成就低落之國中小學生多元及適性的學習機會。配合 12 年國民基本教育之推動，鞏固學生基本學力，教育部已推動「國民小學及國民中學學生學習扶助實施方案」以扶助每一位學習低成就學生，另為追蹤學習扶助受輔學生之學習成效，教育部自 100 年已全面推動補救教學篩選及成長測驗，以標準化之評量系統來篩選需被學習扶助之弱勢低成就學

生，並個案列管每年施以 2 次之成長測驗，以追蹤其學習扶助之學習進展狀況。補救教學為鞏固我國學生基本學力之基礎工程，從學生起點行為篩選診斷、學習內容、教材、教學人員專業增能、補救教學實施方式、學生學習成效檢核、督導機制及法規均做了全盤規劃，期許所有教學人員、學生、家長能配合推動，讓孩子的學習腳步不再延遲(教育部，2014)。

數學是一門高知識結構性的學科，若要提升低成就學生的數學程度，便應先找到學童學習困難的問題點。奧蘇貝爾 (Ausubel) 在「意義學習理論」中提出，先備知識為學習者能否順利學習的重要關鍵，在學習中若有先備知識做為基礎，學童便能順利將新知識做連結 (張春興，2013)，所以要促進學童有效學習，教師應須診斷出個別學生的起始行為，實施補救教學。

82 年版數學課程的核心精神乃強調學習是一連串建構知識的過程，學習者的既有知識及認知發展會影響學習的成效，因此主張在學生既有的基礎和經驗中建構與理解數學概念。學童在數學課程的學習活動中是主動學習者，也是學習的主角。學童在教師布題的情境中，透過對話將所察知的概念表達出來。(國家教育研究院籌備處，2009)。

82 年版數學課程主張教師應引導學生從生活經驗中主動建構與理解數學概念，進而獲得數學的知識，培養運用數學的方法與解決問題的態度與能力。並且強調學習環境除了要配合學生的認知發展外，更應該刺激認知的發展，而學習動機就是學習的主要條件之一，為了激發學生的內在動機，主張教材中應設計多元性的學習活動，藉以引發兒童主動學習數學的意願，使學生從活動中感受數學的意義、數學的生活性和趣味性(陳佳琳，2010)。

教育部在民國 82 年，率先完成修訂「國民小學數學課程標準」，課程重視數學能力的養成與數學概念的理解、強調學習方式以數學解題為主等。82 年版國小數學教材係由教育部委託國立編譯館編印而成。

研究者在多年前一次縣內數學研習中接觸建構數學，當時在南投縣國教輔導

團總召集-林宜城¹校長的帶領下，縣內逐漸掀起一陣建構數學的教學翻轉熱潮。當時研究者理解到 82 年版數學課程，能將建構思維概念運用於數學教學中，並發現藉由具體教材的操作及師生對話能提供適當的鷹架，有助於學生概念的釐清進而促進有效學習。

因此研究者嘗試在課堂中逐步的實踐，發現建構教學法確實能引發學童內在的思考與啟發，學習成效優於傳統數學教學。然而，對於剛接觸建構教學的研究者而言，難免對建構數學的課堂實踐與教學模式有所疑惑，除了在課餘參與數學研習精進教學，82 年版數學教材，便成為研究者鑽研與熟悉建構教學的重要參考依據，其包含數學概念地圖、布題脈絡與順序、提問方法與學生可能的迷思概念，於 82 年版數學教材教師手冊中都有詳細的說明。經過對 82 年版數學教材的理解，並在課堂中實踐，發現有助於協助學童釐清數學迷思概念。

而研究者在新學年即將帶領一個新班級—五年級學生，學生於四年級下學期五月接受教育部科技化評量系統篩選測驗，全班數學科測驗通過率僅占 45%，研究者明白，在進入五年級數學課程時，許多數學概念的學習，尤其是五年級上學期的教學單元—分數的擴分、約分和通分(單元教學的分段能力指標:N-3-06 能理解等值分數、約分、擴分的意義)，必須仰賴中年級穩固的分數概念為基礎，尤其是四年級等值分數概念，因此新單元學習的先備經驗、相關概念的釐清與穩固，成為刻不容緩的首要教學重點。研究者在教學現場遇到此困境，因此欲利用學生學期開始前的暑假期間，運用 82 版數學教材進行等值分數的補救教學，並進一步探討學童在此次補救教學的學習成效為何。

¹從操作中學數學—林宜城。擁有嶄新思維的數學老師將傳統的數學課翻轉得非常漂亮，跳脫既有的框框，重新定義了數學課，或許就從一個有趣的點子/遊戲開始，然後延伸、建構，最後，用魔術般的手法帶著孩子一步步的聰明拆解！

南投縣漳興國小退休校長林宜城一生致力推動數學教育，著重由繪圖以及實際生活的連結來解答數學，拉近學生和數學的距離，讓學生認為數學不只是考試，而是能真正解決生活問題的工具。
https://video.cloud.edu.tw/video/co_news_content2.php?p=326329

第二節 研究問題與研究假設

壹、研究問題

基於上述的研究背景與動機，本研究採行動研究的模式，運用 82 年版數學教材輔助四升五年級低成就學生的等值分數概念學習，並在實際的教學過程中運用行動研究循環的模式，適時的調整教學內容與教學策略，藉此提昇低成就學生在數學分數的學習成就，同時探究低成就學生，對於 82 年版數學課程教學應用於數學等值分數教學與學習上的自我覺察，探討教師實際運用 82 年版數學教材於數學等值分數的教學實施歷程、及學生學習成效。本研究的研究問題，臚列如下：

- 一、運用 82 年版數學教材於五年級低成就學生「等值分數」補救教學，是否能提升教與學效能？
- 二、運用 82 年版數學教材於五年級低成就學生「等值分數」補救教學，是否能幫助學生釐清迷思概念？
- 三、運用 82 年版數學教材於五年級低成就學生「等值分數」補救教學，是否能促進學生多元表徵轉換？
- 四、運用 82 年版數學教材於五年級低成就學生「等值分數」補救教學，是否能提升學習成效？

貳、研究假設

- 一、因為 82 年版「等值分數」教材提供「學生可能的想法」及「解題策略」，協助教師理解教材脈絡，進行有效備課，所以能促進教與學效能。
- 二、因為 82 年版「等值分數」教材使用「提問」策略，讓學生進行解題的理解與反思，主動建構數學概念，所以有助於引導學生釐清迷思，建立正確概念。
- 三、因為 82 年版「等值分數」教材之教學活動設計透過畫圖與對話進行，所以能促進學生多元表徵轉換並建立完整概念。
- 四、因為 82 年版「等值分數」教材使用「多元表徵」與「提問」策略作為學習

鷹架，讓學生進行解題的理解與反思，主動建構數學概念，所以能提高學習成效，表現分數有顯著提升。

參、名詞釋義

一、 82 年版國小數學課程

強調學生為本的知識建構觀的 82 年版數學課程於民國 82 年 9 月公布，民國 85 學年度實施。82 年版國民小學數學課程標準總目標：「國民小學數學教育目標，在於輔導兒童從日常生活經驗中，獲得有關數學的知識，進而培養有效運用數學方法，以解決實際問題的態度及能力。」(教育部，1993)

二、 行動研究

蔡清田(2000)認為教育行動研究是一種將行動與研究結合起來進行教育改革的方法。其目的是診斷和治療特定情況下的教育實踐問題，或改善實際的教育工作狀況，並縮小實踐與理論之間的差距。

行動研究在教育中的應用使教育工作者可以直接進行研究，以解決問題和改善當前狀況。因為行動研究的主要目的是解決當前的問題而不是建立普遍的法則，所以其「實用」價值實際上高於「理論」色彩(張世平、胡夢鯨，1988)。

本研究結合行動與研究，主要在運用 82 年版數學分數教材，協助國小四升五年級分數概念學習表現低成就的學生，進行補救教學後，探討補救教學之實施過程、策略與成效。

三、 補救教學

補救教學是針對學習低成就或學習成效低落與欠佳的學生，利用額外的教學時間，以提昇其學習成效的一種教學方式。救教學重視個案資料的搜集、診斷評量及教學後的測驗，是一種診療式教學，透過資料蒐集與困難診斷了解學生的實際學習狀況，並給予所需要的協助，其歷程是採「評量---教學---再評量」的循環(張新仁，2001)。本研究中的補救教學，將針對個案進行前測以診斷其學習困難之處，並且運用 82 年版數學分數教材，所進行的一系列補救教學活動，在教學

結束後施以後測，分析學生在數學分數概念的學習成效。

四、學習低落

「弱勢」並不等於「低成就」。「低成就學生」的定義為「補救教學受教對象之界定，分為三類：一類為學生的實際學業表現明顯低於其應有的能力水準；另一類為學生的實際學業表現明顯低於其班級平均水準，亦稱之為低成就；一類為學生學科成就不及格，且其學業表現明顯低於其他學生甚多，稱之為成績低落（張新仁，2001）。本研究所指的低成就學生是指研究者目前進行補救教學的五年級低成就學生，這些目標學生皆是透過教育部國民小學學習扶助科技化評量，在數學科目未通過的學生，有提昇介入進行補救教學的必要。



第三節 研究設計

本節研究設計分為二大部分說明，分別為研究架構與研究流程。

壹、研究架構

本研究希望針對教師在教學現場所發現的問題，透過不斷的教學、省思、評估、修正，規劃一可行性的補救教學方案，幫助學生建立正確的分數概念。研究者不僅希望透過行動研究幫助教學者本身精進教學品質及促進專業成長，更期望在行動研究中提升學生分數概念的思考層次及學習成效，以達精緻化補救教學方案之目的。

研究者為教學者，根據蒐集之文獻資料分析與探討。補救教學以中年級分數概念不穩固者為對象，因此，研究者蒐集學習扶助科技化評量之考題設計紙筆測驗前測卷，並根據測驗結果，進行個別的對話分析診斷學童的迷思概念。教材部分參考 82 年版數學教材，進行個別化、適性化之教學規劃。教學時依照學童不同的程度實施一對一的個別化教學，同時融入多元表徵及對話之鷹架策略，提昇學童學習成效。每個教學活動結束，根據教學者自我省思、與課中學習單及學童的學習回饋，評估學習成效，並進一步修正教學。

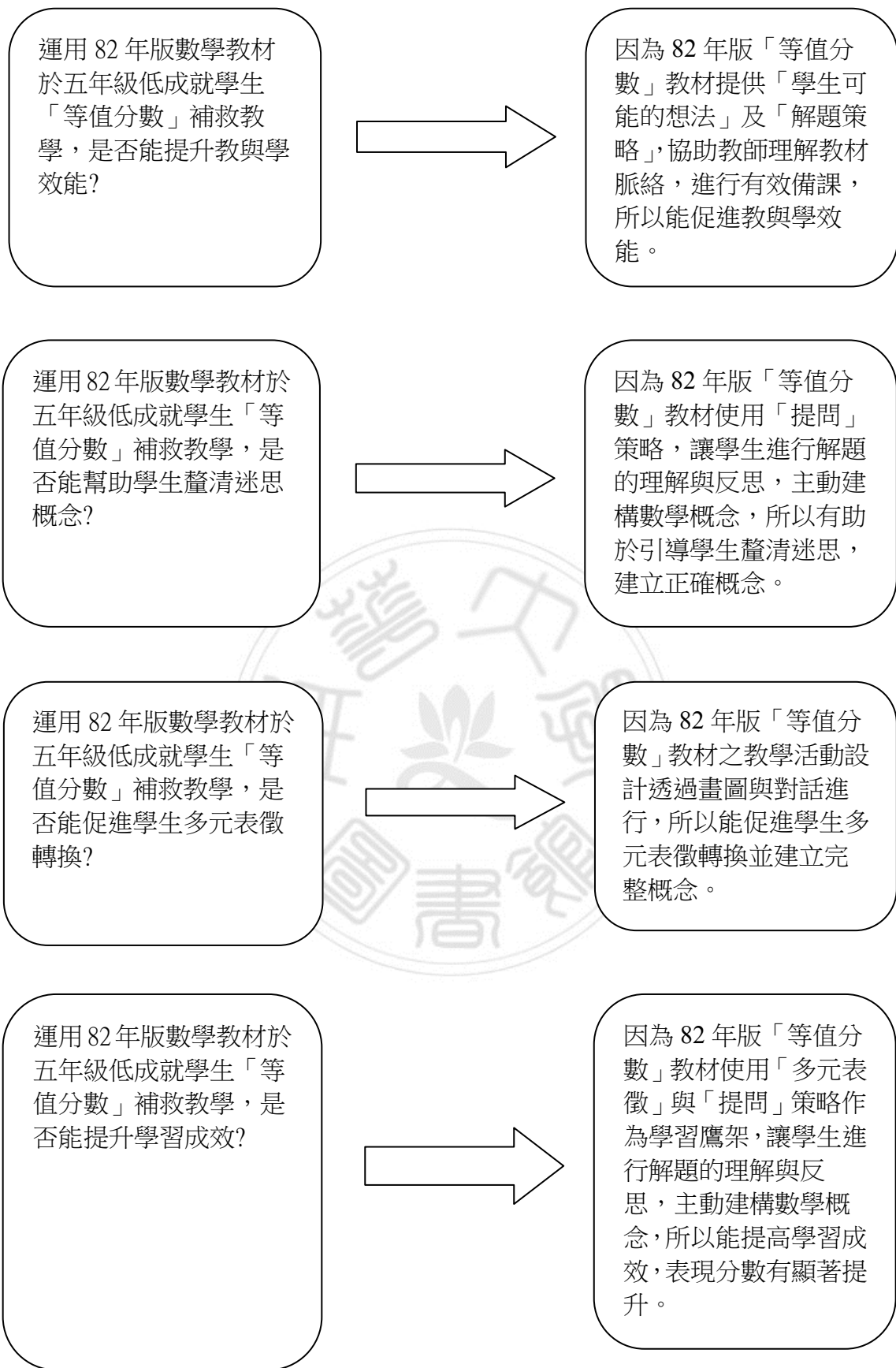


圖 1-3-1 研究架構圖

資料來源：作者自製

貳、研究流程

本研究目的在規畫適合學生的補救教學活動，以提昇分數概念不穩固學童之數學學習成效，以順利銜接後續的學習。因此，研究者依據文獻資料及實務教學經驗，並採用 82 年版數學分數教材，規畫一套適合數學低成就學生的補救課程。本研究的主要目的除了提昇分數基本概念不穩固學童的學習成效，也期望從中探究釐清分數迷思概念之有效教學策略。

研究歷程共分為三個階段進行：第一階段為規畫期，主要是完成補救教學活動的規畫。第二階段實施補救教學方案並加以修正；第三階段評定學生的學習成效並完成報告的撰寫

一、研究前的準備階段

(一)文獻蒐集及探討、分析教材

蒐集並閱讀鷹架策略理論、82 年版數學分數教材、補救教學理論之相關文獻，以形成研究者對研究主題的了解與基礎架構，確定研究主題、研究目的、研究方法。

(二)編製筆試測驗工具與篩選個案

研究對象的篩選是補救教學前的重要工作之一。由於研究者新接的五年級學生，於四年級下學期五月接受教育部科技化評量系統篩選測驗，全班數學科測驗通過率僅占 45%，然而進入五年級階段，許多數學單元的學習都必須仰賴中年級穩固的分數概念為基礎，因此概念的釐清與穩固成為刻不容緩的首要教學重點。研究者蒐集教育部學習扶助科技化評量之考題設計紙筆測驗前測卷，並根據測驗結果進行個別的對話，分析診斷學童的迷思概念，篩選出需要補救教學之學生。

二、研究階段

(一)進行前測並訪談學生，了解錯誤原因

進行前測，施測後配合訪談，探討學生學習表現及分析學生的學習困難。再以「中年級分數之分年細目對照 82 年版數學分數教材結果表」

找出 82 年版數學分數教材中相對應的教學單元以實施教學。

(二)擬定補救教學計劃

針對個別學生的錯誤概念再以「中年級分數之分年細目對照 82 年版數學分數教材結果表」分析學童中年級分數所缺乏之概念，從 82 年版數學分數教材，找到相對應的教學活動並設計學習單，規劃符合適性及個別之補救教學計劃。

(三)進行補救教學

在執行教學階段，研究者的工作主要包含教學活動及教學省思兩大部份。

1. 執行教學

基於上述研究，本補救教學行動研究乃利用暑期（8 月 10 日至 8 月 18 日之間，共七天）進行教學。每天進行 2 節共 80 分鐘（每節課 40 分鐘）的教學活動，兩星期內共實施約十四節合計 560 分鐘的補救教學。補救教學考量對象為學習困難及分數概念不穩固之學童，因此教學過程使用鷹架策略進行對話，能一邊對話診斷迷思概念，一邊引導學童透過多元表徵進行概念的釐清與學習補救。由於行動的過程中所遭遇的困境可能隨時進行修正，所以每日以一個教學活動為主，分為統一授課時間及個別化指導時間，統一授課以教導該教學活動之核心概念為目標。對於教學過程中概念仍不穩固之學童，則規劃個別指導時間以協助其確實釐清概念，以順利銜接下一個學習活動的學習。

每次的教學活動做有系統的「評量-教學-再評量」，以教材的課前準備單評量該堂活動所欠缺或不穩固之概念，以課中學習單教導該活動之核心概念，課後學習單則做為評量之用。

教師針對學習速度較慢之學童提供適性策略，個別指導建立正確概念，學習速度較快之學童可自行習寫課後評量單或指導其他學童以利精熟學習，此為融入「個別化教學及合作式學習」之策略。

2. 教學反思

研究者於每天教學結束後，針對教學活動中之學生回饋(學習態度及學生心得回饋)、教學中發現的迷思概念或學習困難、教師提問與師生對話釐清概念、

教學活動中的發現與調整(包含教學中及教學後)，記錄於教學日誌。教學者依據當日所記錄之教學日誌，做為下一節教學活動修正調整的依據，或再從 82 年版數學教材中尋找適當教材補救學生先備經驗之不足之處、並釐清概念，以有效的提升學生在等值分數的學習成效。

3. 實施後測

補救教學完成後，將進行等值分數的後測，分析學生作答情形，以作為判斷補救教學是否有所成效之依據。

三、資料整理撰寫與撰寫報告階段

(一)整理與分析資料

將研究過程中所蒐集的資料加以整理、對照與分析，而本研究所蒐集的資料包括：紙筆試測驗資料(中年級等值分數測驗卷一前後測試卷)、訪談資料(針對學生的前測結果進行訪談以診斷分析迷思概念)、補救教學資料(學生心得回饋、多元表徵檢核表、教學日誌)。

(二)撰寫報告

當研究所需資料已蒐集、整理且分析完畢，研究者將進行研究報告的撰寫，在撰寫過程中如遇到任何疑問，隨時會到研究場域中求證與澄清。

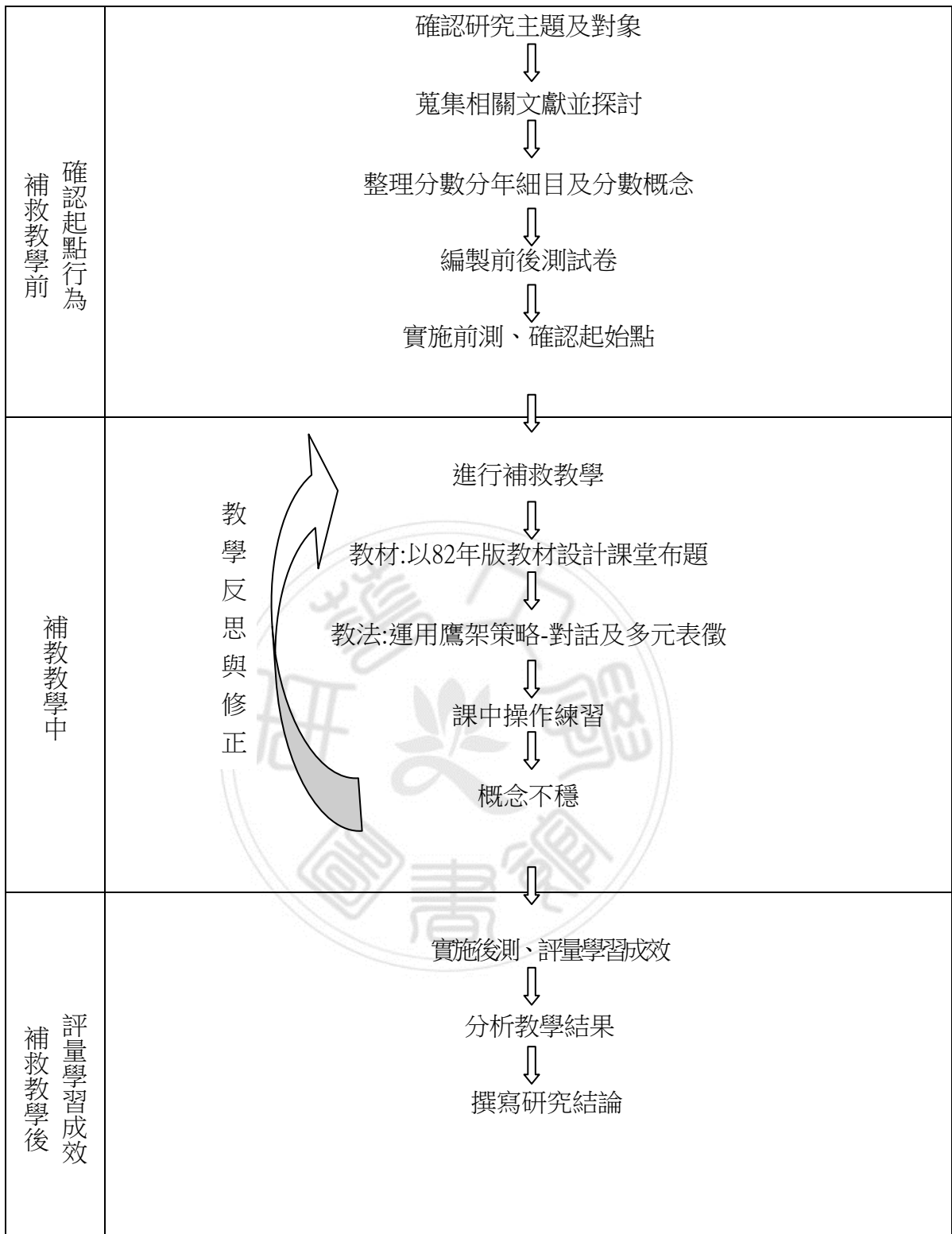


圖 1-3-2 補救教學研究流程圖

資料來源：作者自製

第四節 可能貢獻

壹、可能的貢獻

一、研究貢獻

提供教師進行等值分數補救教學時，教材的合宜參考。

二、研究範圍

本研究範圍以南投縣某國小四升五年級學生為主，分析其中年級數學分數概念的學習困難之原因，並進行補救教學。

(一)研究區域

本研究考量研究便利性，區域範圍限定在南投縣某國小的五年級學生為主。

(二)研究內容

研究者所實施的補救教學內容，僅限定在四升五年級學生之前所學習的中年級數學分數教材範圍。

三、研究限制

本研究採取行動研究，以四升五年級學生在中年級數學等值分數概念出現學習困難者，進行補救教學，因此研究結果僅作為一般四年級分數概念之補救教學的參考，不宜過度推論；除此，在分析資料時，雖然力求客觀，但研究者個人的主觀判斷仍難以完全避免。

第二章 文獻回顧

本研究以探討 82 年版數學等值分數教材應用於四年級低成就學童的補救教學，其學生之學習歷程與成效為目的。研究者針對議題搜集相關文獻資料後，加以歸納及分析後，提供做為依據。本章共分五節，第一節為補救教學，第二節為學童數概念的發展，第三節小學為分數課程，第四節為 82 年版數學分數教材。

第一節 補救教學

補救教學是對學習低成就或是程度落後的學生實施個別、適性化的教學以確保學生具備應有基本學力。本章節在探討國內外學者所提出的各種補救教學模式和教學策略，提供本研究落實有效的補救教學。

壹、為什麼要補救教學

國內的研究顯示，數學學習障礙會隨著年級而遞增，在小學三到六年級的平均出現率為 6.6% (陳麗玲，1993)。因數學是一門極具系統性之科學，若在學生低年級時遇到學習障礙未能及時補救，待升上中高年級時補救教學會相對更為棘手，學生的挫折感比率也會隨著逐年升高(王三幸，1992)。

以「希望感」觀點而論，思考弱勢低成就學生灰心喪志三步曲：目標受阻→憤怒(Rage)→絕望(Despair) →漠不關心(Apathy) (Rodriguez-Hanley & Snyder, 2000)Snyder 認為希望感是個體在追尋所欲目標 (desired goals) 時所產生的認知結果，而個體在追尋目標的過程中，若自覺一直沒有進展，希望感會因此降低，負向情緒會隨之而來，亦可能危害其幸福感。

根據皮亞傑的認知發展理論，兒童的學習應由個體主動積極構建，並隨著個人的身心發展過程，呈現出不同的學習方式和行為。補救教學以差異化的方式順

應學生的特點和發展，所採用的學習策略會影響低成就學生的學習效果(吳清基，1995)。

羅爾斯的正義理論強調，每個人都應享有發展自己潛能的自由和權利，並且每個人都是平等的，無論種族，性別，信仰和階級如何。它還強調，在追求個人機會均等的過程中，處於弱勢的人們應享受積極的差異作為輔助，以達到真正的公平，這是對正義的追求(羅爾斯，2003)。

貳、補救教學的定義：

補救教學是指對學習困難的學童進行適當診斷，並針對其學習問題給予特別補習教學的過程(張春興，2007)。

補救教學基本上是一種診療教學模式(**clinical teaching**，也稱臨床教學模式)，在教學之前，選擇要接受補救教學的對象。重點是了解學生的學習困難，選擇適當的教學模式精心設計課程內容，以滿足學生的個別需求，提昇學生的學業成就，進而增強其自我價值感的意義活動。它使用的是「評估-教學-重新評估」的循環歷程。

整個過程重視個案資料的蒐集、診斷評量，以及在教學後的測驗，以了解學生的實際學習情況並提供必要的幫助。理想情況下，經過一段時間的補救教學後，學生可以跟上原班的教學進度。

參、補救教學之課程設計與教學策略

國內外常用的補救教學模式有資源教室模式、學習站模式、套裝學習模式，以及電腦輔助教學模式(杜正治，1993；林建平，1997；張新仁、邱上真、李素慧，2000)。分別介紹如下：

一、資源教室方案

資源教室模式是一項輔助性的措施，可為有需要的學生提供教室和課程。他

們大部分時間與普通學生在普通教室裡一起上課，而少部分時間在資源教室裡，在那裡他們接受資源教師的指導。資源教室一方面可以為資優生提供更深，更廣的教育，而且可以為學習困難的學生提供不同的教材和教學方法，並實行個別或小組教學以彌補正規教學的不足。

二、學習站模式

學習站的型態是實施補救教學中最符合經濟效益的做法。它利用教室的自然環境來規劃學習區域，並且它是最簡單且易於實現的，無需另外尋找教室。同時，可以在同一學習區域中設置多個學習站。每個學習站的佈置非常簡單。它只需要兩三個課桌，再加上一些輔助教材和教具。在每個補習教學活動中，根據個別學生的需要和進度，選擇適當的教材並實施個別化教學。

三、學習實驗室模式

學習實驗室模型的基本假設認為學習困難的主要原因在於情境因素(教學方法，學習方法和學習環境等)。每個學生都需要採用不同的學習方法。根據學生的個人需求，實驗和選擇，提供最佳的教學方案。為每個學生建立個人檔案來詳細記錄每個學科的學習狀態，並通過老師的診斷為每個學科設定學習學習單元和目標。

四、套裝學習材料模式

套裝學習材料模式是一種基於能力的，自我導向的學習方法，可幫助學生逐步學習概念或技能，並鼓勵他們獨立學習。每套學習材料都是針對特定的能力或技能而設計的，並提供各種活動來實現學習目標和適性的教學。為了避免學習受到挫折，這套學習材料的設計和安排以容易學習為首要考慮。

五、電腦輔助教學模式

CAI 是一種教學模式，它使用電腦來呈現教材，控制教學進度和環境。技術

和設備的使用可以建立積極的學習態度，增強低成就學生的成功經驗，並使教師能夠根據補救教學學生的興趣分配作業。只要您投入學習，電腦就會做出適當反應並提供即時反饋，易於操作且用途廣泛。

綜上所述，本研究與學習站模式(learningstations)較吻合，教師於教室內佈置學習角，並準備好適當的補充的教材與教具。在每次進行補救教學活動時，依據個別學生的需要與進度，取出適當的教材，實施個別化教學。

不同的是，本研究除了參考學生在補救教學平台所測得的結果，並額外設計應用題來診斷分析學生學習困難，量身訂做適合的教材與教學方法。

除了補救教學模式，針對補救教學策略，國外學者(Slavin,1989;McLaughlin&Vacha,1992)指出，使用直接教學法、合作式學習、精熟教學，與個別化教學等課程計畫，能有效幫助低成就學生，分別介紹如下：

一、直接教學模式

通常，在課堂上，教師使用特定且清晰的教學步驟為學生提供與該學科內容直接相關的教學。強調教師主導的教學環境，教師清楚地讓學生知道每節課的主題學習目標。教師使用結構嚴謹的教材，嚴格控制時間和教學過程，並隨時向學生提供反饋。

這種教學模式適合於教導學生記憶事實，學習動作技能以及簡單的閱讀，寫作和算術技能，認為老師主要負責組織和呈現教材，而學生的主要任務是接受學習。

這種教學模式的教學步驟有(張新仁，1995)：1.復習舊知識。2.呈現新教材。3.學生在教師指導下練習。4.提供回饋、校正。5.學生獨立練習。6.每週和每月的總復習。

二、合作式學習模式

傳統的教學重視學生個人間的競爭，「合作學習」教學法視學生為學習主體，透過小組內合作學習方式促進同儕互動和主動學習，進而精熟學習內容。個別學生的學習成就取決於團隊全體成員的共同努力和目標的實現，老師的角色已經從傳統知識傳授者轉變為學生學習的引導與協調者，主要任務是計劃和設計學習活動，選擇合適的學習方法，教授合作技能以及評估學習效果。(Johnson & Johnson, 1994; Slavin, 1994)。

合作式學習則強調透過小組內合作學習的方式精熟學習內容。主要的倡導人物為 Slavin，此教學模式的主要特色有以下三項(張新仁，1995)：

- 1.異質分組：將不同背景(性別、能力、種族、社經)的學生混合編組。
- 2.建立相互依賴關係：鼓勵學生互助合作，分享資源，彼此相互學習成長。
- 3.重視小組獎勵：達成標準時，即可獲得獎勵。

三、精熟教學模式

精熟學習法針對每位學生的需求，提供多樣化的教學方式協助他們獲得預定的學習結果，因此教學前應確定教學目標，並在教學上主動誘導學生學習促使學習進步、同時診斷學生學習困難，並適時提供補救教學，激發學習動機，讓每位學生能獲得成功經驗。其運作的模式可分為教學前的準備、課堂上的教學、評定等第等三大內容。

(一)教學前的準備

先設定「精熟」標準

1. 教師界定學生學習教材內容：

擬訂教學目標，確認需「精熟」的目標，再依據課程目標編製總結性評量來評定學生「精熟」與否。

2. 教材設計

教師將課程分為系統化的學習單元，教師依學習的順序或知識的階層編排學習單元，以便將每個單元的教材遷移到下一個單元。

3. 編製形成性測驗

根據單元目標準備形成性測試，並預先設置精熟表現標準，以幫助教師診斷學生的學習錯誤，以此作為修正教學的基礎。而形成性測驗的標準設定在答對80%~90%之間，在標準之上稱為「精熟者」；在標準之下稱為「未精熟者」。

(二) 課堂上的教學

在精熟學習中，教師需向學生介紹精熟學習實施的程序，使學生可以順利參與教學活動。在教師的支持和鼓勵下，建立學生學習成功的信心。

在教學中應注意四個要素，即提示、參與、增強與獎賞、回饋和校正活動。在教學活動結束後，應實施本單元的第一次形成性測驗，以瞭解學生學習的結果，未精熟者進行校正活動，適時矯正學習錯誤，在進入第二教學單元之前，實施第二次的形成性測驗，檢視學生是否達到精熟。

(三) 評量等第

精熟學習中使用的形成性測驗和總結性測驗，都屬於標準參照評量。換言之，是以事先訂定的標準來衡量學生成績是否達精熟的水準，而不是與其他同學比較後而定等第。這樣的設計方式旨在激勵學生內在的能力動機，使其與自己競爭，而非與他人競爭的模式。

傳統教學與精熟學習之差異在於傳統教學法假設每一位學生具有相同的起點行為，教師扮演教學的主導者，負責全部的課程，而較少考慮學生的學習成效。而精熟學習模式則假設學生具備不同的起點行為，教師依據個別學生所欲達成的學習目標設計教學策略，是一種注重學生「個別差異」的教學策略。傳統教學法

在學習評量方面，通常採常模參照測驗，學生的行為表現是和他人比較而來，精熟學習則採用標準參照。

四、個別化教學模式

個別化教學模式的理念和部份作法，雖然和精熟教學模式相似，但最主要的差異在於：精熟教學主張由教師進行團體的教學，並且學習進度由教師決定；然而個別化教學主張由學生根據教材個別學習，學習進度由學生自行決定。

個別化教學以 Keller(1968)提倡的個別化教學系統較著名，其作法如下：

- (一)教材細分成若干個單元，每單元皆有評量考試，並且設有精熟標準。
- (二)學習材料是主要的教學來源，教師的角色只是輔助者。
- (三)每位學生依照自己的能力、時間，決定學習的進度。
- (四)每位學生學習各單元完成後，必須參加單元評量，達到精熟標準者則進入下一單元；未達到精熟標準者，就必須重新學習，再接受該單元的評量。
- (五)評量後立即回饋，告知通過與否。

本研究透過前測診斷分析學生的學習困難，並經由適當的對話找出學生的起點行為，進一步訂定教學目標與精熟標準，接著依個別學生不同的程度，選擇適合學習的教材實施教學，再依據課程目標編製總結性評量來評定學生「精熟」與否。而補救教學實施的同時，研究者以合作式學習的方式來增進學生的學習興趣與態度，給予學生充分發表與溝通互動之機會，促進同儕鷹架，並依據學生的學習回饋適時調整教學模式，建立學習成功經驗與提升學生學習成效。

肆、補救教學課程類型

補救教學的課程內容因學習設備、教育理念、教師素養、以及學生需求不同，呈現多樣化類型，而常用的教學課程內容計有補償性、導生式、適性、補充式、

加強基礎性及學習策略等類型（張新仁，2001；杜正治，1993）：

一、補償式課程

補償式課程的學習目標與一般課程相同，而教學方法卻不同，是透過不同的教學方法來達到相同的教學目標。為了達到預期教學目標，在實施補救教學之前，先對學習者做完全的診斷，以清楚其個別需求、性向、以及程度水平。

二、導生式課程

導生式課程教學特色是為學生提供額外的解說，舉更多的例子，並對一般課程所呈現的教材再作複習。導生式課程主要在提供外加的協助，輔助學生學習正規課程內容。除了實施一對一或小組教學等教學方式外，其餘與正式課程沒有差異。導生式課程可以說是正規課程的延伸。

三、適性課程

適性課程的課程目標、教學內容與正式課程相同，不過課程較具彈性，可由教師依據學生的需求選編合適的教材。而且在教法上也較彈性，可使用錄音帶或錄影帶，來取代傳統教科書，考試時也可以用錄音、口試，或表演的方式代替傳統教科書。

四、補充式課程

補充式課程的特點，在於提供被一般學校所忽略、但攸關學生的日常生活或未來就業的知識或技能。

五、加強基礎課程

偏重學生在正規課程中未能習得的基礎知識。加強基礎課程的基本假設認為學習過程是一種線性作用，除非該生已學會當下的所有課程，否則很難進入次一階段的學習，在實施補救教學之前，重要的課題不僅在於診斷學生的學習困難，更要確定學生當時的知識程度與能力水平。

六、學習策略訓練課程

採用學習策略課程的教師所教授的課程內容與正規班級不同，其教學重點不是一般的課程內容，而是學習的策略，包括資料的蒐集、整理與組織方法、以及有效的記憶等。

本研究的課程目標、教學內容與九年一貫 97 課綱相同。在實施補救教學之前，診斷學生的學習困難，確認學生當時的能力水平及需求，參考 82 年版數學分數教材，選編合適的教材單元與內容，並使用一對一或小組教學進行補救。

伍、補救教學課程及教學設計的原則

張新仁(2001)指出在補救教學的課程設計中，首先要考慮學習的原則：由簡到繁、由易到難、由學到不學，以培養學生的自信心和學習動機。而且，課程內容要高度結構化，學習目標要明確具體，才能把握學習重點。此外，學習活動的設計應考慮學生的學習動機、接受程度、能力和注意力。對於中、低水準的學生，教材要簡化，學習活動要多樣化、趣味性強。

陸、補救教學教材面向

教育部根據基本學習內容發展補救教學補充教材，於 101 年 12 月公告，提供生活化、實用性之教學素材、教學指引與評量習題，供國中小老師教學參考及學生自學。教育部建立了補救教學資源平臺，並放置了相關的補救教材供現場教師下載使用。

柒、補救教學對象

學生參加補救教學成效與家庭因素影響息息相關。調查國內學習低成就之國民中小學學生，高達 6 成係家庭因素造成。經濟弱勢之學生常需要協助家中生計，難以在無後顧之憂的情形下將心力置於學習上；而長期弱勢所造成的「習得無助感」，更容易弱化學習動機，甚至衍生行為偏差問題。這些家庭功能不足的

學生不是沒有「能力」，而是缺乏「資源」；不是「不肯學」，而是沒有合適的「學習方法」。除了學校、老師付出愛心外，宜發展適切之介入措施，補強家庭功能，並透過社福單位的介入，給予學生心靈支持和實質的援助，將能有效提升補救教學之成效(教育部，2014)。



第二節 學童分數概念的發展

本節主要是藉由探討學童的分數概念的階段發展，以了解學生問題的本質，進一步應用於教學，釐清學生的分數概念。本節分為三部份，依序是「分數的意義」、「分數概念的要素與發展」、「影響學童分數概念的因素」。

壹、分數的意義

分數一詞來自拉丁文「fangere」，具有小部分、片段、破碎的意思，它的意義是「分開」，通常用來敘述一個被分開的全體之各個部分（羅鴻翔譯，民1980）。在數學上是以有理數來定義分數，即「 p/q ， $p、q \in \mathbb{Z}$ ， $q \neq 0$ 」，而在使用上也因情境的不同而有不同的用法及解釋（Corwin, Russel, & Tierney, 1990）。國內外許多學者對分數的意義也有不同的看法，他們分析了不同情境下的分數認知意義的研究，並主張分數具有多重的意義。

Kieren（1976）認為分數具有以下特質：整數系的擴展；一個具有稠密性、無窮可數的數系；可代表測量的量或數線上的一點，可拿來相互比較並加以運算；具有等值分數特性；可用來代表比率、乘法的運算。

Behr, & Post（1988）將分數解釋為：1. 「部分/全部」的概念。2. 商：兩數相除的結果。3. 線性座標：強調數線的距離長。4. 數線上的一點：實數系的子集合。5. 運算：分數是一種轉換。6. 比值：用一個量值來代表兩個數量的關係。7. 比率：強調兩個數量的關係。

林碧珍(1990)則將分數的意義分成五類：全部區域的部份區域(以連續量為主，如：長度、面積、容積)-部份/全體模式、集合中的部分集合-子集合/集合模式、數線上的一個數值-數線模式、兩個整數相除的結果-商模式、二個集合或二個度量相比的結果-比值模式。

葉乃丰(2007)指出教育部頒布的九年一貫數學領域課程綱要中，分數的課程

內容有部份／全部、子集合／集合、分數是一個數／數線上的一點、等值分數、整數除法的結果、平均、比例中的比。

可見，在小學階段分數概念已經呈現多種複雜的解釋及用法，因此小學學童在學習分數概念時，時常有混淆的情形。然而在分數課程中每一個學習階段、每一個單元的分數概念，在整個分數課程的學習中都扮演著極重要的角色，若是其中一個概念不夠穩固，將會影響整體分數概念的學習，由此足見分數概念補救教學的重要性。

貳、分數概念的要素與發展

吳碧真(2012)歸納學者（甯自強，1993；Piaget，1960）的觀點，認為兒童的分數概念應包含四個要素，分別敘述如下：

一、對單位量的認知

處理分數問題最重要的一個概念就是單位量的確認，學生在解題時，能將給定的單位量內容視為一個整體，再分辨所給定的單位「盒」和單位分量「個」之間的關係後，再予以分割。

例如：

- 1.學生在回答一盒雞蛋有 10 個，其中的一個是幾盒的問題時，能夠回答十分之一盒。
- 2.一盒雞蛋有 10 個時，學生能夠將 $1/10$ 盒視為將 10 個雞蛋平分成 10 等份，其中的一等份，也就是一個。將 $2/5$ 盒視為 10 個雞蛋中五等份的其中二等份，也就是 4 個雞蛋。

二、應分完而且沒有餘數的等分割概念

處理分數問題的另一個重要的概念就是必須有一個可以除盡的全體才有分數的思考。學生開始接觸正式的分數課程時，大多是從分東西的經驗出發，然後

以圓餅圖或方形圖介紹分數，因此學生認為幾分之幾就是要做「分」的動作，而且分完沒有剩餘。

三、具有部分與整體間的關係

處理分數問題重要的部分是必須了解分數的意義，避免忽略了分數是要對整體進行等分割的活動（林福來、黃敏晃、呂玉琴，1996）。分數具有部分與整體間的關係，學童要能視分數 a/b 為一個數，且 a 為整體 b 的部分（連續量情境）或 a 為集合 b 的子集（離散量情境）。

四、單位分量（數）的確認

處理分數問題重要的概念也包括單位分量（數）的確認。當兒童操作了再細分的部分概念或子分割時，他們了解到此細分的部分是全體的一部分，同時這一個細分的部分本身也是一個可以再細分的全體，因為分數是從全體而來，其全體始終不變。

不同學者對學童的分數概念發展有不同的解釋。以下將分述瑞士心理學家皮亞傑（Piaget）、國內學者甯自強等人對學齡兒童分數概念發展階段的看法。

瑞士心理學家皮亞傑（J. Piaget）指出學童的認知發展是漸進的，他運用自己所主張的兒童認知發展理論進行活動設計，進一步研究兒童對分數概念的發展，從中發現從知覺的部份－整體的關係與操作的細分之間有很大的差別。

Piaget, Inhelder and Szeminska（1960）使用連續量之具體物，針對四到七歲兒童對面積分割的行為進行研究，以探索兒童如何建構部分與全體之間的關係來形成分數的概念，研究發現兒童的分數概念發展階段為：

一、四歲到四歲半的兒童

對於將一物分為兩半十分困難，在分割動作之前沒有預先的計劃或基模。這個階段的最大特徵是兒童不會注意到他所接觸的部分，是某個比較大的全體之中

所含的元素，其缺乏部分與全體之間關係的概念。而對於不同形狀的分割，則是以長方形比較容易，圓形次之，正方形較為困難。

二、四到六歲的兒童

對於規則的或小範圍的物品具有分半的能力，但將物體平分成三等分的能力尚無法表現，若是原來整體的形狀大小改變，增大或變小，兒童將其分成一半的能力便得延緩，其在分割圖形中利用長方形操作比較容易理解。

三、六到七歲的兒童

他們不必經過錯誤嘗試，便能順利將物體平分成三等份，但其操作策略仍處於具體的操作階段。以分餅為例，此階段的兒童能夠理解，將各個分割塊數所得到的總量與整個餅是相同的，足以顯示其具有整體性的保留概念。

四、十歲左右兒童

能順利操作將一個餅平分成六等份，首先將一個餅平分成三等份，然後再將所分得的三塊餅分別平分成二等份。

同時 Piaget(1960)還指出，兒童在了解分數運算之前必須具備下列七個子概念：

1. 進行分數思考前必須要有一個能除進的全體。
2. 分配東西時各部分須與接受者相對應，一個分數包含各部分的限定數。
3. 子分割活動中，全體必須完全被耗盡沒有餘數。
4. 全體被切割成各部分的數與切割數，彼此間的關係是固定的。
5. 用分割後的每一部份都是相等的來詮釋分數概念。
6. 當兒童操作了再細分的部分概念後，他們就能了解此細分的部分是全體的一部分，同時一個可再細分的全體就是此一細分的部分本身。
7. 分數是從全體而來，因此其全體始終不變。

甯自強 (1993a) 以「分數詞」為區分，來分析兒童在不同階段的運思方式，所呈現的數概念和分割活動，並依此將兒童的分數詞意義分為以下五種(引自賴麗珍，2011)：

一、分數的前置概念

在合成運思期，兒童的運思活動雖具有數概念與分割活動，但分割活動未能將子分割單位數值化，更缺乏等分割後的分得量與單位量兩者作並置比較，僅是靠直覺做判斷，分時不一定公平相等，也不一定窮盡，只有部分而缺乏部分—全體的概念。當兒童僅能用序列性合成運思(甯自強，1993)來處理有關整數問題時，其分數詞所代表的數學意義多半為並置類型。

例如「 $1/3$ 」對兒童而言，其意義是「1 和 3」或是「3 和 1」，若給予兒童 6 個花片，要求其取出其中的「 $1/3$ 」來，他的答案會拿出 1 個花片或 3 個花片。

二、起始單位分數

兒童一旦引入累進性合成運思於分數的情境之中，如同在連絡兩整數的整數情境中一般，將子分割單位構成的分子部份內嵌於由子分割單位構成的分母部份，此時分數詞的意義稱為「內嵌並置類型」。舉「 $1/3$ 」為例來說明，由 1 所指涉的集聚單位，並內嵌於由 3 所指涉的集聚單位之中，也就是說 $1/3$ 意即「3 中間的 1」。此時的兒童對單位量的掌握並不明確，假如問一份是全部的 $1/3$ ，那全部是多少？兒童會回答 4，即部份是在全體之中，易混淆部份與全體的關係。在計算 $1/3 + 1/3$ 時，當 1 被複製了，分割數也會同時被複製，所以回答 $2/6$ ；若問 $1/4$ 和 $1/3$ 誰比較多，則會回答 $1/4$ ，可見此時學童的部分—全體關係並不明確且容易產生混淆。這也反應出「起始單位分數」是不可以被重複的單位分數。此時的分子僅內嵌於分母的一部分，兒童仍無法從事單位分數的累進活動，因此這時的單位分數稱為起始單位分數。

三、加法性分數

區分兒童不同的分數詞意義時，用以來標出僅能以部份-全體運思同化分數情境的分數概念類型的名詞(Ning, 1992)。從此子分割活動已成為可被集聚的計數單位，子分割單位自此開始成為單位分數的單位。例如： $1/3 + 1/3$ 是 $2/3$ 。已經具有處理分母的合成、分解、比較問題的能力，但仍缺乏通分的概念，無法聯絡兩個以上的子分割活動，例如有 6 個糖果，請兒童拿出其中的 $2/3$ ，兒童回答 4 個，並不是代表兒童認知為「3 份中之 2 份」，而是「每 3 個中的 2 個」。此時 6 個糖果的 $2/3$ 和 6 個糖果的 $4/6$ 是相同的，但是 $2/3$ 與 $4/6$ 兩者是不同的。

四、巢狀性分數

測量運思階段是具有雙向的部份-全體運思，並具有子分割單位數值化的分數概念，因為在此時能夠同時運思兩個分數，知道兩個等值分數為同一分量的測量值。例如：當兒童能察覺 10 個積木的 $2/5$ 與 10 個積木的 $4/10$ 是相同的，同時也認為這是在測量同一分量，此時分數單位便由加法性分數轉變為巢狀分數。其部分—全體的運思並非單向的，而是轉變為雙向的。當從全體中再次分割時，全體並不會因此而被摧毀，但因缺乏彈性思考的緣故，仍然還是僅侷限在分母為倍數關係，而無法擴展至兩者的分母為非倍數關係的類型，因此，在此時的兒童不會認為 $2/4$ 與 $3/6$ 是等值的分數。

五、有理數

能進行兩個部份-全體關係的重組，也就是巢狀分數的重組。在此時的兒童不僅具有部份—全體雙向運思的概念，還能夠以分數做為測量單位，在比較 $4/6$ 與 $6/9$ 時，以 $1/18$ 當作測量單位，而 $1/18$ 便是 $4/6$ 與 $6/9$ 的共測單位，此時兒童可以知道兩者都等於 $12/18$ ，因此 $4/6$ 等於 $6/9$ ，此時兒童具備等比例（共變）的概念，學童在此已能進行不同分母或分子的通分，並進行分數的四則運算，也能

處理比值的問題。

參、影響學童分數概念之因素

對於分數的學習，學生經常出現許多錯誤和迷思概念，他們無法將舊知識轉化為新知識。分數是一個複雜但卻非常重要的概念，學童如果無法真正理解分數，將會嚴重影響日後的數學學習信心與成就(湯錦雲，2002)。

李彥典(2008)參考國內外相關文獻，發現影響學童分數概念之因素如下：

一、單位分數概念不穩固

影響二分之一概念的可能因素之中，與簡單概念相關的因素有以下幾點：

1.能否將一個連續量分成長短或大小相同的兩等份。

2.學生能否順利進行分割東西的動作。

3.將東西分成兩等份後，能否理解其中一份與整體之間的關係。單位分數概念是一切分數概念的基本，單位分數概念如果不夠穩固，將會直接影響學童未來分數相關概念的學習。

二、等分的概念薄弱

1.學童等分的概念薄弱，其在判斷東西是否被等分問題時，往往只注意到被分割數，卻忽略分割後的每一塊是否相等。

2.在遇到大小不同的離散量時，會分成個數相同的份數，但總量卻不相同。

3.學生在解等分問題時，離散量情境問題相對於連續量情境問題來得較為容易。

4.學生在處理分數符號「一半」及「二分之一」，其學習表現不一致，一半對學生來說比較容易，而二分之一對學生而言是較為困難的，足以證明在等分問題上學生對一半就是二分之一的連結概念並不穩固。

此外，許多的研究也都指出學生在學習分數時，普遍存在著等分概念不夠穩

固的問題，在分數學習中「指出分割後的每一部分都要相等」是十分重要的概念，因此如何有效釐清學生等分概念的迷思，是教師不容忽視的問題。

三、忽略單位量

1. 學童無論在處理「部分/全部」，「子集/集合」或數線的分數問題，都有指認單位量的困難。
2. 在確認單位量的過程中，兒童易受到分子或分母的控制，忽略既定的單位量，擅改單位量。
3. 未注意單位量不一定相等、將總量視為單位量、受題目訊息的影響、單位量錯誤或改變單位量。
4. 連續量情境的問題容易出現單位量、內容物的單位詞混淆的情形，或將單位量及部份量的數字倒置。

四、受整數基模影響，視分數 a/b 為兩個獨立的數

分數的符號為 a/b ，部分學童將分數視為分子 a 、分母 b 兩個獨立數的組合，受自然數影響，舊經驗干擾分數概念的學習。因此，在進行分數比大小時，學生運用整數知識來處理分數問題，將分子、分母視為獨立的二個數，比較分數大小時會直接將分子和分母分開來比。

五、受不同表徵方式影響

1. 以圖形表徵系統而言

學生在處理「部分/全部」的分數圖形問題時，以長方形最易，正方形次之，圓形最難。而學生要在數線上標出 a/b 以將單位長分為 b 等分比單位長分為 $2b$ 等分的問題為易。

2. 符號表徵系統

在處理等值分數時，約分的問題比擴分的問題難，分母已知再求分子的

試題比分母未知的試題容易。

3.表徵系統間的影響

(1)圖形表徵與符號表徵之間的轉換：在分數比大小時，發現部分學生不會將

圖形轉換成符號再做比較。

(2)實物表徵與符號表徵之間的轉換：發現操作教具的成就比操作符號的為差。

(3)語言表徵與符號表徵之間的轉換：會受語言因素影響，而標示錯誤。

(4)不同表徵系統之間的轉換難易情形，尤其以圖形轉為符號最難。

肆、分數的學習困難

在實施補救教學前，須先正確診斷學童分數學習的錯誤類型，方能是個別學童的不同需求，找到適合的教學策略，促進有效的教學與學習。本研究參考顏淑如(2008)所分析學童的分數的學習困難，其將研究大致歸納為下：

一、學童解題表現

(一)等分割概念錯誤類型為：(1)未注意等分或忽略等分；(2)只注意到被分割的塊數，而忽略分割後的每一塊是否相等(游政雄、呂玉琴，2002；詹婉華，2003)。

(二)單位分數概念錯誤類型為：對於單位量、內容物單位詞出現混淆的情形，會以全部內容物當單位量(李曉莉，1997；黃靖瑩 2003；游政雄、呂玉琴，2002；詹婉華，2003；魏麗枝、游自達，2007)。

(三)單位量解題表現最差(詹婉華，2002)：(1)在單位量已知、部分量未知時，分子會參照等分配數；(2)部分量已知、單位量未知時，分母會參照等分配數；(3)單位量錯誤或改變單位量(游政雄、呂玉琴，2002；詹婉華，2003；魏麗枝、游自達，2007)。

(四)等值分數概念的解題表現上：在不同單位等分段發展上，學童在等分割數等於分母的表現最佳(王秀琪，2003；林碧珍，1990；彭海燕，1998；Behr, Lesh, Post, & Silver, 1983)。但在約分(單位等分段等於分母的因數)及擴分(單位等分段等於分母的倍數)的表現上則有不同研究結果。林碧珍(1980)研究結果為擴分表現優於約分。但 Behr et al. (1983) 則發現學童在約分的表現優於擴分。

二、學童無法有效解決等值分數問題的困難

(一)缺乏分數等分割、部分—整體等基本概念(洪素敏、楊德清、蔡鳳秋，2007)。

(二)單位量概念不足：缺乏單位量轉換的運思，因此對於處理有關單位分割段不等於分母的問題感到困難(洪素敏、楊德清、蔡鳳秋，2007；黃靖瑩，2002；Kieren,1983)。

(三)受自然數影響：部分學童在比較分數大小時會將分數視為是分母、分子兩個獨立的自然數組合(Behr,Wachsmuth,Lesh,&Post,1983)。

(四) 不會等分或未以相同單位等分、未具細分並組合的能力(詹婉華，2003)。

第三節 國小分數課程

數學的學習注重循序累進的邏輯結構，而國小數學課程中「數與量」主題裡包含正整數、分數與小數等三個主要部分。其中「分數」不僅被列為正整數和小數之間的橋樑，也是未來國中階段擴展為有理數概念的基礎。本節分為二部份，分別為「分數課程能力指標」、「分數課程分年細目」

壹、「分數」課程能力指標

九年一貫數學學習領域在國民小學數與量課程的教學目標具體如下：

1.第一階段(國小一至二年級)：能初步掌握數、量、形的概念，其重點在自然數及其運算。

2.第二階段(國小三至四年級)：在數方面要能熟練自然數的四則與混合計算，培養流暢的數字感；另外，應初步學習分數與小數的概念。在量上則以長度的學習為基礎，學習各種量的常用單位及其計算。

3.第三階段(國小五至六年級)：能熟練小數與分數的四則計算；能利用常用數量關係，解決日常生活的問題。

期望藉由課程目標的達成，培養學生的演算能力、抽象能力、推論能力及溝通能力；學習應用問題的解題方法；奠定數學基礎，並希望能培養學生欣賞數學的態度及能力。

研究者希望能以九年一貫之各階段目標，為本研究之教學設計參考，了解研究對象在各個學習階段的學習目標，以及應達成與具備的能力，以為本研究教學活動的設計參考依據，協助研究對象培養應有的基礎能力。研究者先將九年一貫數學課程中與「分數」相關的能力指標整理如表 2-2-1。其中第一碼表示主題，以字母 N 表示「數與量」；第二碼表示階段，分別以 2、3 表示第二、三；第三碼則是能力指標的流水號，表示該細項下指標的序號(教育部，2008)。

表 2-2-1 分數課程能力指標

九年一貫數學課程能力指標	
N-2-09	能在具體情境中，初步認識分數。
N-2-10	能認識真分數、假分數與帶分數，做同分母分數的比較、加減與整數倍計算，並解決生活中的問題。
N-2-11	能理解分數之「整數相除」的意涵。
N-2-12	能認識等值分數，並做簡單的應用。
N-2-13	能認識一位與二位小數，並做比較、直式加減及整數倍的計算。
N-2-16	能在數線上標記小數，並透過等值分數，標記簡單的分數。
N-3-05	能認識最大公因數、最小公倍數與兩數互質的意義，並用來將分數化成最簡分數。
N-3-06	能理解等值分數、約分、擴分的意義。
N-3-07	能理解通分的意義，並用來解決異分母分數的比較與加減問題。
N-3-09	能理解分數(含小數)乘法的意義及計算方法，並解決生活中的問題。
N-3-10	能理解分數(含小數)除法的意義及計算方法，並解決生活中的問題。
N-3-13	能做分數與小數的互換，並標記在數線上。

資料來源：(教育部，2008)

貳、「分數」課程分年細目

能力指標是依主題與階段的學習能力而訂定，而多數指標須採分年教學，方能達成其教學目標。因此，由階段能力指標演繹出更細緻的分年細目及詮釋，方能明確掌握分年教學的目標。

能力指標、分年細目與分年細目詮釋之內容，應為教師教學及教科書編輯的主要參考依據。此外，教師教學及教科書編輯亦可依詮釋內容為基礎，在深度與廣度上做適度的延伸(教育部，2008)。

因此研究者依據表 2-2-1 再將分數之分年細目整理如表 2-2-2。其中分年細目與能力指標相同，同樣採三碼編排，第一碼表示年級；第二碼表示主題，以小寫字母 n 表示「數與量」第三碼則是分年細目的流水號，表示該細項下分年細目的

序號(教育部，2008)。

表 2-2-2 分數課程分年細目

年級	分年細目		對照指標
三年級	3-n-11	能在具體情境中，初步認識分數，並解決同分母分數的比較與加減問題。	N-2-09 N-2-10
	4-n-07	能理解分數之「整數相除」的意涵。	N-2-11
四年級	4-n-08	能認識真分數、假分數與帶分數，熟練假分數與帶分數的互換，並進行同分母分數的比較、加、減與整數倍的計算。	N-2-10
	4-n-09	能認識等值分數，進行簡單異分母分數的比較，並用來做簡單分數與小數的互換。	N-2-12 N-2-16
	4-n-10	能將簡單分數標記在數線上。	N-2-16
五年級	5-n-06	能用約分、擴分處理等值分數的換算。	N-3-06
	5-n-07	能用通分做簡單異分母分數的比較與加減。	N-3-07
	5-n-08	能理解分數乘法的意義，並熟練其計算，解決生活中的問題。	N-3-09
	5-n-09	能理解除數為整數的分數除法的意義，並解決生活中的問題。	N-3-10
	5-n-13	能將分數、小數標記在數線上。	N-3-11 N-3-13
六年級	6-n-03	能認識兩數互質的意義，並將分數約成最簡分數。	N-3-05
	6-n-04	能理解分數除法的意義及熟練其計算，並解決生活中的問題。	N-3-10 N-3-02
	6-n-05	能在具體情境中，解決分數的兩步驟問題，並能併式計算。	A-3-01

資料來源: (教育部，2008)

第四節 82 年版數學分數教材

壹、82 年版數學分數教材

強調學生為本的知識建構觀的 82 年版數學課程於民國 82 年 9 月公布，民國 85 學年度實施。以下針對 82 年版數學課程的基本理念與特性及其在分數教材的處理加以分別說明：

一、82 年版數學課程的基本理念與特性

82 年版數學課程之教育目標包括：(一)養成運用數學知識與方法，解決問題的能力；(二)讓兒童從自己的經驗中，建構與理解數學概念；(三)培養使用數語言溝通、討論，講道理與批判事物的精神；(四)養成在日常生活中善用各種工具從事學習與問題解決(國家教育研究院籌備處，2009)。82 年版數學課程的基本精神乃主張學習是一個建構知識的過程，學習的成效會受到學習者的既有知識及認知發展的影響，因此強調透過學生的經驗中建構和理解數學的概念，並能以數學語言溝通、討論與批判，及善用工具解決問題。

在配合課程目標的教學活動中，數學課程的教學也強調教師需提供具數學學習意義的問題，增強學生討論的能力，及提供具思考挑戰的學習環境，以培養兒童使用語言溝通，理解數學知識與概念及問題解決的能力。兒童在數學新課程的學習活動中成為學習主角，扮演主動學習的角色。兒童於教師布題情境中，自我思考解題或與小組同儕討論溝通，思索合理性的解題策略與解答。兒童在教室的問與答討論與學習情境中，將所學的知識概念表達出來，聆聽他人不同的解題思考，提問問題以批判解題的合理性，與他人溝通與澄清想法。整個學習歷程包含聯結舊經驗、趨近與提取知識表徵、提出可行性、監控解題策略的合理性等，此種重視合理性討論的互動式學習，乃多元化的知識建構為導向(國家教育研究院籌備處，2009)。

由於 82 版數學課程的數學觀強調兒童知識建構的過程和群體問題解決文化的培養，教師的教學方式和兒童的學習方式也發生了變化。鍾靜(1996)指出教室裏的場景不再只是靜靜的聆聽，而是老師安排的情境，為孩子們提供解題的機會。兒童在發表、討論、同意、補充、提問等活動中學習數學，使數學課堂產生了新的課堂文化

二、82 年版數學課程分數教材處理

82 年版數學課程，引導學生從生活經驗中積極建構和理解數學概念，獲取數學知識，培養運用數學方法和解決問題的態度和能力，培養溝通、討論、交流的精神，數學語言中的推理與批判。透過發現教學活動的本質，引導發現與探索，培養學生的思維能力。因此，在教材設計中，強調通過兒童熟悉的生活情境來發展概念，讓兒童感受到數字內容的意義；此外，還強調學習環境不僅要與學生的認知發展相協調，而且要激發學生的認知發展，動機是學習的必要條件之一。為了激發學生的內在動機，強調在教材中設計多樣化的活動，激發孩子積極學習數學的意願，使學生從活動中感受數學的意義，感受數學的生命和興趣。

數學教育的目的在使學童獲得數學物件的意義，數學物件的意義，是指物化的數學要領及其表徵形式，物化的數學概念是指內蘊化(interiorized)的解題活動類型(甯自強，1991、1995；引自漿治邦，1997)，而表徵是用某一種形式，將解題活動類型表現出來，以達成溝通的目的(蔣治邦，1994)。因此 82 年版數學課程自第三冊起，要求清楚地記錄與溝通「先算什麼，再算什麼，……最後算什麼」，形成多步驟算式紀錄格式的共識，採用多步驟算式紀錄格式，除了可以更清楚地溝通活動經驗外，更強調提供活動類型組成成分的反思機會，以做為發展更高層次運思方式的基礎。用算式格式、多步驟算式紀錄格式或直式紀錄格式，來記錄解題活動，記錄是在活動之後，強調活動組成成分的反思與討論；而問題

紀錄則是用算式填充題的形式，來摘要記錄文字題。亦即要求學生理解問題的含義，形成問題解決計畫，提取出預期問題解決活動中的重要元素，用算式填充題的格式描述，然後進行問題解決活動。

此外在第四冊教材中，引入單位分數的符號時，強調溝通單位分量獲得的過程。第五冊引入真分數符號，則強調溝通數個單位分量合成的過程，在同分母的分數加減問題中，分母皆不超過一百，故而僅要求用分數算式來摘要記錄解題活動與結果，而無多步驟算式紀錄的格式。當學童能使用分數或小數算式記錄解題活動與結果時，則可進一步地用分數或小數算式填充題來記錄問題(蔣治邦，1997)。

在 82 年版數學課程的分數教材中，將分數對兒童的意義分為：(一)表示操作：在具體物上進行「分的活動」，重視操作模型與分數符號之連結；(二)部分/全部：包括連續量與離散量之情境；(三)數線上的數值：可視為線段長或數線上的一點；(四)整數相除的結果；(五)比或比值；(六)表示量的大小。並強調「分數詞是等分割再合成數份活動的表徵」，即分數的學習起點是等分割再合成其數份的活動，藉此命名單位分數、真分數及假分數等，讓兒童不斷透過實際操作或心理操作等分割再合成其數份的活動，以掌握分數的意義與理解如何解決加減乘除各類型的分數問題。

82 年版數學課程的分數概念主要內容包括分數概念的初步認識、同分母分數的加和減、等值分數、分數乘以整數、約分和擴分、通分。此外根據分數數詞所描述量的計數性質，82 年版數學課程分數教材將分數問題情境可區分為三類：(一)基準單位量是連續量的情境；(二)基準單位量是離散量的情境，其中依單位分數的內容物個數，又可將分數問題情境分為三類：1.單位分數內容物為單一個物；2.單位分數內容物為多個個物；3.單位分數內容物不是整數個個物。(三)

基準單位量是全部的情境。

由於對兒童認知概念發展的預期，82 版教材的處理由原來的數學內容邏輯結構轉變為兒童認知發展的過程，明顯影響了教材時間序列的安排。以教學活動為單位，在跨學期的不同單元的不同活動中，同一類數學問題的情況逐漸加深或加廣，從而延長了各類數學單元的接觸時間，延緩了傳統解題策略的討論，從而應對學生發展和學習中的個體差異。

在教學活動的進行上，「教師布題－學童解題－解題活動的發表與討論」是教學活動的基本流程，教師為布題者，學童是解題者，學童在教師的鷹架下進行解題活動，對活動進行反思抽象，來建構自己的數學知識(甯自強，1993)。



第三章 研究途徑與研究方法

本研究主要目的是採用行動研究法，並參考 82 版數學教材發展適性化且個別化之補救教學模式，透過鷹架教學策略之對話與多元表徵，幫助學生釐清分數的迷思概念。在整個行動研究的過程，透過教學實踐、省思及調整的循環，探討學童學習之困難與概念轉變之歷程，以期發揮補救教學最佳的成效。

本章內容共分為五節，第一節為研究途徑，第二節為研究方法，第三節為研究流程，第四節為研究工具、第五節為研究資料蒐集分析，茲分述如下：

第一節 研究途徑

國內外的研究報告都指出學童學習分數是困難的(林福來、黃敏晃、呂玉琴，1996)。對中年級學童來說，「分數符號」是非常抽象的符號，也是全新的觀念。

而許多分數教學相關研究證實抽象概念具體化的教學過程，可藉由多元表徵策略及鷹架教學策略獲得學習成效(王淵智，2005；吳碧真，2012；張熙明，2004；曹萬春，2005)。因此，本節將探討「鷹架策略」之「多元表徵」與「對話教學策略」，以作為研究者補救教學策略運用的重要依據。

壹、鷹架策略

Vygotsky (1978) 最早提出「鷹架」一詞，他認為「促進學習」就是讓學習者的概念從「自發性」的概念遷移到「系統性」的概念，因此，他進一步提出「近側發展區」(zone of proximal development, 簡稱 ZPD) 的概念來說明促進學習的方法。李咏吟 (1998) 也指出當兒童停留在某一認知層次時，此時，成人能以有系統的引導或給予關鍵性的指點，則兒童較易超越原來的認知層次。

鷹架是教師依據兒童的能力，提供給兒童有意義而且有組織的學習材料，並將學習活動分成許多能勝任的階段，以增加學生的參與 (Rogoff, 1990)。

在教育情境上，鷹架可能包括示範、給線索、提示、暗示、分解提問、放聲思考的示範和直接教學 (Stuyf, 2002)。

因此，在等值分數教學過程中，研究者依據學童的能力與學習經驗選擇適當

的鷹架，以協助學童度過學習困難，順利學習。

一、鷹架的功能

教學者在設計學習鷹架時，一個完善的學習鷹架基於 Wood、Bruner&Ross (1976) 的看法，應具有下列六項功能（引自李咏吟，1998）：

1.引起參與（Recruitment），活動開始時，必須引發學習者參與的興趣並繼續學習的意願。

2.減輕學習的負擔（Reduction in degree of freedom），將教材簡化並切割成數個較小的次單位（chunk），如此學習者較能專注於他可做的事物，其他不能做的再由他人協助。

3.活動方針的管理（Direction Maintenance），引導學習者針對目標行事，不分心於其他事物上。

4.提出關鍵特徵（Marking critical feature），對於事物的特徵，必須應用各種方式引導學習者注意、察覺。

5.挫折的控制（Frustration control），學習者遇到瓶頸或發生錯誤，協助渡過。

6.示範（Demonstration），在學習的指導設法引用學習者的語言或行為，如此學習者較能瞭解並模仿。

二、鷹架的原則

Greenfield（1984）提出教學上鷹架的六個原則：

1.實際教學活動中，由教師作為學習者能力發展的鷹架。

2.支持的程度依照學習者的程度調整。

3.學習者的能力增進時，教師提供的支持程度隨著減少。

4.教師提供支持的多寡與工作難度成正比。

5.教師的支持以逐步漸進的方式進行並隨時校正。

6.教師的支持以導向內在化為目標，逐漸使學習者能夠獨立自主。

因此在等值分數的教學過程中，教師應扮演引導者的角色，依據學童的經驗與能力，提供適宜的鷹架，協助其跨越學習困難，並藉由拆除鷹架，促使其培養

獨立思考、解決問題的能力。研究者在等值分數補教教學研究中，常透過關鍵對話、與圖畫表徵，布題脈絡循序漸進，由簡單到複雜，針對學習困難之學生，鷹架策略提供了引發學習者的興趣及達到簡化的功能，透過鷹架之協助，使學童能順利學得概念，並獲得自信。

貳、多元表徵策略

Bruner (1966) 將表徵區分為三種：動作的 (enactive)、圖像的 (iconic)、以及符號的 (symbolic) 表徵。透過操作來理解概念，即為動作的運思，例如操作實物或具體物教具。圖像的運思，是指以「心像」(mental image) 來掌握概念，也就是當具體物消失時，於腦中仍保留心像，運用圖像表徵的方式以進行內在的活動。符號的運思，則是指運用符號來掌握概念。

Lesh, post 與 Behr (1987) 提出數學學習及解題時的五種表徵系統：具體事物的經驗表徵(experience-based "scripts")、具體操作表徵(manipulatable models)、圖形影像表徵(pictures or diagrams)、口說語言表徵(spoken languages)、書寫的符號表徵(written symbols)。如圖 3-1-1 所示：

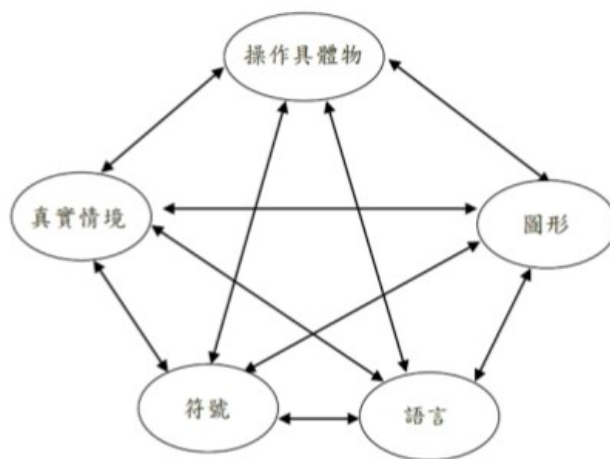


圖 3-1-1 表徵系統圖

資料來源：Lesh, post 與 Behr (1987)

1. 真實情境 (experience-based scripts)：知識是由「真實世界」的事件所組成

的，此時知識可被用來解釋或解決其他問題的情境。

2. 操作物 (manipulatable models)：例如教學時，老師以花片、積木來代替真實的餅乾、糖果；或以分數板的等分割、可移動的性質，幫助學生瞭解分數的概念。

3. 圖形 (pictures or diagrams)：靜態的型態，可被內化為心像，例如以圓餅圖、長形圖或線段的方式來表示分數的「部分/整體」關係。

4. 語言表達 (spoken language)：利用口語來表徵，例如「二分之一」代表把整體平分為二份，取其中的一份之意義。

5. 書寫符號 (written language)：被寫成的符號、方程式或句子片語，例如二分之一的數學符號為。

Lesh et al.(1987)提到多重表徵系統之間的轉譯與它們本身內部的轉換是重要的，由 1-1 圖可看出每個表徵之間都具有連結關係。並進一步提出轉譯是影響數學學習和解題表現的重要關鍵，因此加強或修正這些能力能有助於數學概念的學習與獲得。

由上可見，數學的方式具有多樣性，用來作為呈現數學想法的表徵方式，會出現多樣的型態。而研究者在教學活動中，多引導學童運用圖形表徵理解布題情境，透過圖象進行等值分數的解題，並觀察自己所畫的圖形，發表想法，在對話過程反思與釐清等值分數概念，最後將想法以符號表徵呈現。因此，在補救教學歷程中，圖像表徵與語言表徵可謂重要的鷹架策略，能協助學童順利在各數學形式間順利轉譯，達成學習目標。

參、對話教學

林碧珍(2000)認為教師在學生發表時，要能抓住時機提出「關鍵性問話」，幫助學生再次反省，進一步理解數學的意義。教師透過「關鍵性問話」不但可引發、刺激學童新的認知發展延伸，也可澄清、導正學童錯誤的概念，為學童提供

良好的學習鷹架。

而教育部八十二年版數學課程標準中提到「群體解題文化」，希望藉由群體共同解題、討論的歷程，落實以學生為本位的觀點，期望學生能從群體互動的過程中發現、建構知識（教育部，1993）。

因此研究者透過八十二年版數學教材的實施教學，應用課室裡之對話做為教學策略，以期提昇學童的思考及學習成效。

由於本研究對象為低成就學生之補救教學活動，研究者考慮學生未曾經驗過分組討論活動，且缺乏穩固成熟的分數概念，進行分組及生生討論可能遭遇困難，因此，此次補救教學活動進行以師生對話及全體互相討論為主。

（毛炳楠，2005）認為建立數學概念的過程中，教師必須引導學生將注意力保持在學習主題上，而且學生在尚未理解概念時，教師必須在過程中大量使用提示。且當學生產生迷思概念時，自己並不容易理解，需要老師或同儕的協助，利用連續的追問與質疑，可以迫使學生自己在解釋自己想法時釐清概念。

因此本補救教學進行模式是由研究者布題，引導學生依據布題情境畫圖，並透過對話讓學生釐清、學習正確概念。在畫圖解題的歷程中，研究者一一巡視，了解個別學生的解題方式，並與之一對一對話，進行提示、示範、連結、比較等鷹架策略，引導學生思考解題，最後再以分享、發表和全體討論的方式，進行歸納總結。而研究者與學生的個別對話，是為之後引導全體討論的關鍵參考依據。

第二節 研究方法

本研究採用行動研究法。行動研究是一種具有行動實踐的研究方法。同時隱含著行動與研究的雙重意義（潘淑滿，2003）。陳惠邦（1998）指出，教育行動研究指的是在教育情境中，由教育專業工作者親自進行，以改善並獲致理想教學的行動研究，透過行動研究，老師可以得到新的知識，並解決自身立即性的問題，同時拓展自身的能力與知識。

行動研究是指實務工作者對自己在工作職場中所遭遇到的實際問題，以反省、持續努力的方式進行研究，並擬出解決問題的策略，付諸執行、評鑑、反省和修正的過程（秦麗花，2001）。

本研究旨在透過等值分數的前測，理解學生目前學習狀況及起點行為，並透過對話診斷其學習困難，據此蒐集相關文獻用以分析，再從 82 年版分數數學教材中找到相對應的教學單元與活動實施補救教學。研究期間共計 14 堂課，於學童四升五暑假期間對研究對象施予補救教學。欲探究上述問題，本研究採用行動研究法，研究者同時具備教學者與教材設計者兩種角色，教學過程中，透過現場互動情形、課堂學習表現檢核表、學生課後回饋單、教師教學日誌，分析學生學習成效，並在教學的過程中隨時進行反思與調整教學策略，修正教學行為作為下一次教學的參考。

第三節 研究對象

參與此研究的對象為研究者-教學者，及 5 位四升五年級的學生。分別介紹如下：

壹、研究對象

為方便於研究的進行，研究對象是由研究者自己所任職學校的四升五年級學生中進行篩選，因此樣本的選取為方便取樣。

由於研究者新接的五年級學生，於四年級下學期五月接受教育部科技化評量系統篩選測驗，全班數學科測驗通過率僅占 45%，然而進入五年級階段，許多數學單元的學習都必須仰賴中年級穩固的分數概念為基礎，尤其是五年級上學期一開始就有「分數的擴分、約分」學習單元，因此分數基礎「等值概念」的釐清與穩固成為刻不容緩的首要教學重點。

其中的小婷、小樺、小澤、小凌及小平皆為接受教育部科技化評量系統篩選測驗不通過的學生，並經過和學生低、中年級導師訪談，此五位學生確為數學學習低成就學生，經過與家長討論後，表示有意願加強學童的學習能力，因此成為了本研究的研究對象。

確定研究對象後，以教育部學習扶助科技化評量之考題設計紙筆測驗進行前測。針對測驗問題中的錯誤，一一對學生進行深入訪談，探討學習表現及分析學生迷思概念。五位學生的基本資料如表 3-4-1：

表 3-4-1 個案基本資料表

學生	家庭背景及教養觀	數學學習態度	數學學習表現
小樺	生活優渥，多以物質滿足小孩。知道小孩學習理解較慢，雖口頭上說不給孩子壓力，但對孩子的成績	平時缺乏自信，學習動機低落。課堂中或書寫功課時分心狀況頻繁，大班上課學習效果有限。個別指	多數時候雖當下聽懂，馬上出練習題也能正確解題，但下次遇到同樣的題目又忘記如何解題。

	與表現仍感壓力，該生相對也感受的到壓力。	導時態度好，也表示願意學習。	◎四年級五月篩選測驗 56 分
<u>小婷</u>	媽媽會指導功課，但對數學指導較感困難，遇有問題時則留待學校老師教導。	對課業學習缺乏信心，平日上課容易分心發呆。但學習態度良好，遇不會的問題會主動提出並聽取指導。	數學概念理解較慢，指導後解題能力有改善，但有時仍容易混淆，或是忘記，學生自己也常感到困擾。所以當該生有進步或努力學習時，老師會立即給予肯定與鼓勵。 ◎四年級五月篩選測驗 64 分
<u>小澤</u>	孩子功課皆自行完成，父母不指導也不要求。	缺乏自信，學習較被動。經過討論並加以鼓勵，該生願意多花一些時間努力，個別指導時也很認真學習。	理解力不差，經過個別指導進步相當顯著，但計算過程錯誤較多，導致成績表現不穩定。 ◎四年級五月篩選測驗 40 分
<u>小凌</u>	功課偶而有哥哥、姊姊陪伴完成，但多數僅是寫完，正確率不高。	課堂上專注力不佳，經提醒後有改善。個別指導後學習表現有顯著進步。但學習態度不積極且草率。	理解力弱，計算較慢，且多錯誤。 ◎四年級五月篩選測驗 36 分

<p>小平</p>	<p>平日與阿姨同住，管較嚴格，功課由阿姨指導。</p>	<p>語文科表現優異，對數學科學習較缺乏信心。理解力不差，但學習態度較馬虎、被動。</p>	<p>計算過程錯誤較多，導致成績不理想。學習歸因弱、缺乏信心，若能積極投入努力，表現會有顯著進步。</p> <p>◎四年級五月篩選測驗 56分</p>
-----------	------------------------------	---	---

資料來源：作者自製

由上分析歸納，研究對象普遍專注力不佳，缺乏學習動機，不過經過討論與鼓勵也願意再努力看看。針對學童的學習特質--易分心，研究者設計融入鷹架策略-多元表徵及對話，個別指導其迷思概念，以增進學童之學習動機提昇其學習成就。

第四節 研究工具

本節將依序說明本研究之主要工具，包括紙筆測驗、課中學習歷程紀錄、82年版數學分數教材。

壹、等值分數概念紙筆測驗（前後測試題）

本研究參考教育部學習扶助科技化評量之成長測驗歷年考題、康軒出版社編輯的題庫、南一出版社編輯的題庫，以及九年一貫數學課程領域課程綱要中年級等值分數之分年細目 4-n-09 設計紙筆測驗前測卷，再經二位數學教育專家逐題審查，因此本研究工具有內容效度與專家效度。

試卷考量數學學習低成就學童之特質，教學目標以習得概念為主，因此，後測試卷與前測試卷題目相同，但為避免記憶效應，後測題目數據與前測有所不同。

貳、課中學習歷程紀錄

一、多元表徵檢核表

分數檢核表在於教學中記錄，可以了解學生學習成效，並從中了解學生的學習軌跡。檢核表中，○表示「達成」、☆表示「部分達成」、▲表示「未達成」。

二、課後的回饋單

分數的課後回饋單在於實施 82 年版分數數學教材的補救教學結束後，彙整學生對 82 版數學等值分數教材實施教學的想法，包括對畫圖解題與課堂提問對話、發表與分享的感想。

三、教學日誌

研究者即為教學者，在每次的補救教學活動後，記錄教學者教材的實施過程中發現到的問題，如布題後學生的理解程度、學生解題中遭遇的困境及迷思，及教師的提示、引導、對話是否對學童解題有幫助，進行紀錄與省思，以做為下一次教學活動調整修正的參考依據。

參、運用 82 年版教材的補救教學活動內容

82 年版的教材，由原來數學內容的邏輯結構方式，調整為配合兒童認知發展的過程，在教學活動的進行上，「教師布題－學童解題－解題活動的發表與討論」是教學活動的基本流程，教師為布題者，學童是解題者，學童在教師的鷹架下進行解題活動，對活動進行反思抽象，來建構自己的數學知識(甯自強，1993)。

因此本研究採用 82 年版數學教材做為活動設計之主要依據。本研究對象之學童學習的課程是依據的是 97 課綱編排，因此研究者分析 97 課綱的分年細目後，再就等值分數分年細目析出若干重要數學概念(要件)，並從 82 年版數學教材中找出相對應的教學單元，結果見下表 3-5-1：

表 3-5-1 中年級等值分數數學概念及 82 年版數學教材對照表圖表

分年細目及數學概念	82年版數學教材中找出相對應的教學單元
4-n-09 能認識等值分數，進行簡單異分母分數的比較，並用來做簡單分數與小數的互換。	第九冊第六單元 活動 1、2 第九冊第十二單元 活動8

資料來源：作者自製

根據研究者在前測測驗後，對學童進行訪談與對話，發現許多學生前測的錯題，是因為對分數基本概念存在迷思，無法正確說出單位分數所代表的意思。因此，加強「分數的認識」做為補救教學活動的起步，以穩固學童對「部份／全體」的概念，再進行「等值分數」的補救教學。

綜上所述，補救教學活動分為兩部分，分別為「分數概念」與「等值分數」。其中「分數的認識」並不在等值分數的教學範圍內，增加此概念的教學活動，乃因應學童在前測時存在分數的概念迷思，因此將其放入教學中，做為此次補救教學行動研究的開始，如表 3-5-2 所示：

表3-5-2分數補救教學活動摘要表

教學 單元	82 年版等值分數教材 教學活動(重點)	日期/節 數
分數 概念	<p>第七冊第六單元</p> <p>活動 7：以分母不大於 100 的單位分數數詞，命名「等分後的內容物為單一個物」的單位分量。</p> <p>活動 8：解決以「分母不大於 100 的單位分數為被計數單位」的合成問題。</p> <p>活動 10：使用真分數數詞(分母≤ 100)，命名「等分後的內容物為單一個物」的單位分量所合成的真分量，並加以記錄。</p>	<p>8/10</p> <p>2 堂課共</p> <p>80 分鐘</p>
	<p>第七冊第十單元</p> <p>活動 5：使用單位分數數詞(分母≤ 12)，命名「等分後的內容物為多個獨立個物」的單位分量。</p> <p>活動 6：建立「單位分數所指示的內容物為多個個物」的分數數詞序列。</p>	<p>8/11</p> <p>2 堂課共</p> <p>80 分鐘</p>
	<p>第七冊第十單元</p> <p>活動 7：在單位分數所指示的內容物為多個個物的情境下，聽到分數(≤ 1)的數詞或看到分數(≤ 1)的數字，拿出相當數量的具體物。(分母≤ 12)</p>	<p>8/12</p> <p>2 堂課共</p> <p>80 分鐘</p>
等值 分數 4-n-09	<p>第九冊第六單元</p> <p>活動 1：在離散量的情境下，進行兩個真分數數詞(字)所描述的量的比較問題。</p> <p>(單位量的內容物≤ 36 或 $= 100$)</p> <p>活動 2：在離散量的情境下，進行兩個真分數數詞(字)所描述的量的比較問題，並記錄比較結果。</p> <p>(單位量的內容物≤ 36 或 $= 100$)</p>	<p>8/13</p> <p>2 堂課共</p> <p>80 分鐘</p>
	<p>第九冊第十二單元</p> <p>活動 8-1：在離散量的情境下，給定單位量及單位分量(兩者不互質)，使用分數數詞(字)描述此單位分量，並察覺各種分數值彼此等值。</p> <p>例：12 張色紙裝一包，6 張色紙是 $6/12$ 包、$3/6$ 包、$2/4$ 包、$1/2$ 包。</p>	<p>8/14</p> <p>2 堂課共</p> <p>80 分鐘</p>

	<p>第九冊第十二單元</p> <p>活動 8-2：在離散量的情境下，給定單位量及單位分量(兩者不互質)，使用分數數詞(字)描述此單位分量，並察覺各種分數值彼此等值。</p> <p>例：一盒蘋果有 16 個。12 個蘋果是多少盒？</p> <p>是 $12/16$ 盒、$6/8$ 盒、$3/4$ 盒。</p>	<p>8/17</p> <p>2 堂課共</p> <p>80 分鐘</p>
	<p>第九冊第十二單元</p> <p>活動 8-3：在離散量的情境下，給定單位量及單位分量(兩者不互質)，使用分數數詞(字)描述此單位分量，並察覺各種分數值彼此等值。</p> <p>例：12 張色紙裝一包，6 張色紙是 $6/12$ 包、$3/6$ 包、$2/4$ 包、$1/2$ 包。</p> <p>(將所畫的圖用算是記錄下來)</p> <p>(將離散量情境改為度量化的連續量或連續量)</p>	<p>8/18</p> <p>2 堂課共</p> <p>80 分鐘</p>

資料來源:作者自製



第五節 資料的蒐集分析

研究者於研究對象四生五年級的暑假期間，進行數學等值分數的補救教學。本研究主要採取行動研究的分析方式來探究參與補救教學的五名學生在經過 82 年版數學分數教材實施後，是否增進其學習成效、真正釐清等值分數概念。

壹、資料蒐集

一、教師方面

(一)前測卷後的晤談記錄

(二)多元表徵檢核表

(三)教學日誌：教學活動與目標、學生的學習與回饋、教學中發現的迷思概念或學習困難、教師提問與師生對話釐清概念、以及教學活動中的發現與調整(包含教學中及教學後)。

二、學生方面

(一)紙筆測驗

(二)課後回饋單

貳、資料分析

研究過程中，教師反省日誌、課後回饋單為質性資料；而等值分數前、後測卷，教學檢核表計算答題表現，將兩者分數轉換為全體百分率，作為量化資料。

一、質性資料分析

(一)前測卷後的晤談記錄

施測後配合訪談，探討學習表現及分析學生的學習困難。再以「中年級分數之分年細目對照 82 年版數學分數教材結果表」找出 82 年版數學分數教材中相對應的教學單元以實施教學。

(二)教學日誌

研究者依據教學目標進行教學活動，針對布題後學生之對題目的理解，研究者透過提示、引導，在教學中進行對話與紀錄，並對該堂課教學歷程進行反省，

且檢視學生在該教學活動之學習結果，並以此看出學生學習的進步情形，以作為調整下一次教學活動的依據。

內容包含：教學活動與目標、學生的學習與回饋、教學中發現的迷思概念或學習困難、教師提問與師生對話釐清概念、以及教學活動中的發現與調整(包含教學中及教學後)。

(三)課後回饋單

學生的課後回饋單則是學童對於 82 年版數學等值分數教材之教學方式提出感想與回饋。

二、量化資料分析

(一)紙筆測驗-前測卷、後測卷

本研究在前測卷施測後計算答對率，了解學生在補救教學前的起始表現，並以 82 年版數學等值分數教材實施補救教學後，將後測卷之答對率及前測卷之答對率進行比較，分析學生在實施 82 年版數學等值分數教材之補救教學後，學習成效與表現是否提升。

(二)課中學習表現檢核表

透過圖形表徵作中介的鷹架(bridging)，引導學童運用圖形表徵理解布題情境，透過圖象進行等值分數的解題解決此困境。課中學習表現檢核作為檢視學童能否順利在各數學形式間順利轉譯，達成學習目標。

最後將研究目的與資料來源整理如表 3-5-2：

表 3-6-1 研究目的與資料來源對照表

研究目的	資料來源
探討學生在補救教學前的分數學習表現	前測卷、晤談記錄
探討以82年版數學分數教材進行等值分數補救教學的歷程	教師教學日誌、課後回饋單
探討以82年版數學分數教材進行等值分數補救教學的成效	後測卷、多元表徵檢核表

資料來源:作者自製

第四章 研究分析與發現

本研究主要目的是探討：運用 82 年版數學等值分數教材，以行動研究的方式，協助國小四年級升五年級數學「等值分數」單元低成就學童，進行補救教學課程，探討其在等值分數概念改變情形。並藉由研究者實施的補救教學，探究數學等值分數單元低成就學童的學習歷程，以了解低成就學童在數學等值分數單元的學習困難，以及學童在等值分數概念的學習表現。本章依據研究的結果分述如下：第一節為學童在等值分數補救教學前測結果的分析，第二節為補救教學課程規劃，第三節為運用 82 年版數學等值分數教材實施補救教學歷程之探討，第四節為補救教學後學習成效之探討。

第一節 學童在分數補救教學前測的結果分析

研究首先針對國小四年級升五年級數學「等值分數」單元低成就學童，進行等值分數前測卷之施測，施測時間為 40 分鐘。施測結果以量化和質性兩方面進行分析，以了解學童在等值分數單元的學習困難。量化方面：就學童答題情形，分析其答對率。質性方面：前測卷施測後，依據與學童的晤談，記錄與分析其答題的迷思概念。

壹、學童在前測題的答題表現

等值分數前測卷總題數共計 20 題，研究者將各學童前測之答對題數換算成答對率整理如表 4-1-1

表 4-1-1 前測學童答對題數與答對率統計表

學生	小婷	小樺	小澤	小凌	小平	平均
前測答對題數	12	10	8	6	10	46
前測答對率	60%	50%	40%	30%	50%	46%

資料來源：作者自製

研究者再將上表轉換成長條圖，如圖 4-1-1：

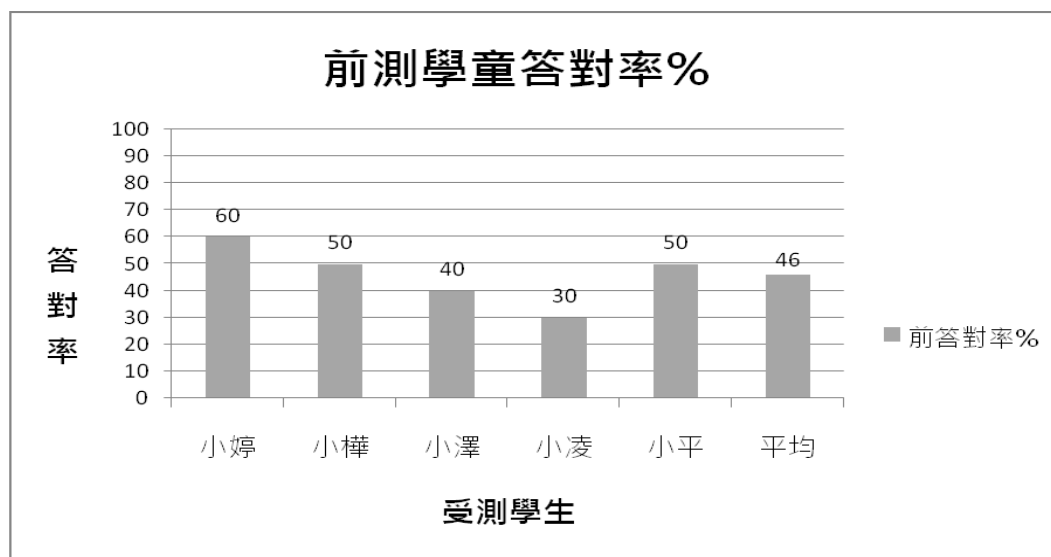


圖 4-1-1 前測學童答對率長條圖

資料來源：作者自製

此五位學童皆為某國小學習扶助科計畫評量篩檢測驗未通過之學生，由上表所示可以知道，分數前測卷包含四年級等值分數完整內容，而學生在前測卷上的整體表現達成率未達理想，平均達成率 46%，其中小婷達成率最高，其次小樺、小平、小澤、小凌達成率最低，通過率未達 50%，表示對此部分內容不甚理解，皆須加強學習。

在前測卷施測後，研究者透過與學生晤談，了解學生易犯錯題型並分析其迷思概念，將其分為以下五類：

一、缺乏「部份-整體」概念

A：受自然數影響：部分學童在比較分數大小時會將分數視為是分母、分子兩個獨立的自然數組合。

例如：一盒 6 顆， $\frac{1}{6}$ 盒=()顆。

學生回答： $\frac{1}{6}$ 盒是 6 顆裡面有一顆。分母的 6 代表有 6 顆，

分子的 1 是其中的 1 顆。 $\frac{1}{6}$ 盒=(1)顆。

因此，當單位分數內容物為多個，

例如：一盒 6 顆， $\frac{1}{2}$ 盒=()顆

學生回答：1/2 盒是 2 顆裡面有 1 顆。分母的 2 代表有 3 顆，分子的 1 是其中的 1 顆。所以 1/2 盒=(1)顆。

B：單位分數內容物多個時，易受分母影響：

在上例一盒 6 顆，1/2 盒=()顆的問題中，學生回答：1/2 盒是 6 顆的其中 2 顆，所以 1/2 盒=(3)顆。

學童只看到分母的 2，便認為 1/2 盒是 2 顆。

C：異分母分數比大小易受分母、分子影響

在例題一盒布丁 24 個， $\frac{4}{6}$ 盒布丁和 $\frac{5}{8}$ 盒布丁，誰比誰少？

學生一開始先嘗試用「盒」比較兩分數的大小。以為

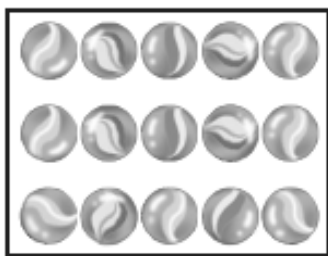
5/8 盒有 8 份，4/6 盒有 6 份，相較之下 5/8 盒的 8 份比較多；而且 5/8 盒取其中 5 份，4/6 盒取中的 4 份，相較之下 5/8 盒的 5 份較多。因此，認為 5/12 盒比 3/8 多。

二、單位量概念不穩固，忽略或混淆單位量詞

欠缺「轉換大小單位關係」之思考，對於單位量、內容物單位出現混淆的情形，會以全部內容物當單位量。

三、分數概念不穩固，將等分割數與基準量單位混淆

在例題:1 袋彈珠有 15 個， $\frac{2}{5}$ 盒彈珠是()個？



學生能將基準量 15 個平分成 5 份，但只將其中 2 個彈珠圈起來，認為 $\frac{2}{5}$ 盒彈珠是 5 份中的(2)個。學生對分數的基本定義不穩固，認為分子 2 是其中的 2 個，而不是取其中 2 份。

四、等分割概念不足

不知道分數是要對整體進行等分割，只注意到被分割的塊數，而忽略要將整體基準量分完，且分割後的每一塊要相等。

在例題：一箱蘋果有 24 個， $\frac{5}{8}$ 箱蘋果和 $\frac{7}{12}$ 箱蘋果，比比看，誰比誰多？

學生認為要將基準量 24 個平分成 8 等分有困難，找不到平分成 8 份後得其中一份有幾顆，因此先畫一份有 2 顆，累數 8 份後共畫出 16 顆。在發現不足 24 顆後，又補畫了 8 顆，湊成 24 顆。最終把 24 顆分成 9 份，其中 8 份各有 2 顆，第 9 份則有 8 顆。

五、對離散量內多的情境題感到困難

在離散量內多情境的題目類型，學童普遍存在迷思，答對率偏低，他們以為每等分都是 1 個，不會去思考「整體被平分成幾等份」，再分析「一份是多少個」，而且部分學童對於「將整體平分成若干份」缺乏信心，不知只要以學過的除法概念就能順利找到答案。

綜合以上分析，研究者發現許多學生前測的錯題，多數源自於對分數基本概念存在迷思，以致於影響之後等值分數相關概念的建立。因此，加強「分數的認識」做為補救教學活動的起步，以穩固學童對「部份／全體」的概念，再進行「等值分數」的補救教學。

第二節 補救教學實施歷程之探討

本節就進行補救教學前的想法與設計，以及補救教學過程中的實施與修正，探討補救教學中使用 82 年版數學分數教材對低成就學生在等值分數學習上的影響，並對學生學習情況做教師省思紀錄，以分析補救教學的成效。

壹、補救教學前的想法與設計

參與補救教學的孩子多為缺少學習動機或存在迷思概念，為了使學生能釐清等值分數概念，增進學習效能，研究者運用 82 年版等值分數教材，在學生前測後晤談分析等值分數學習困難，設計能補救學生分數概念補救教學活動，共計十四堂課。內容依據 82 年版數學分數教材的學習脈絡，回溯學生的起點行為，並使用「多元表徵」與「提問」策略作為學習鷹架，讓學生進行解題的理解與反思，主動建構數學概念，以期提高學生學習成效。

貳、補救教學中的實施與修正

研究者使用 82 年版數學分數教材進行補救教學，教學過程中，透過現場互動情形，以課堂學習表現檢核表、學生課後回饋單、教師教學日誌，分析學生學習成效，並在教學的過程中隨時進行反思與調整教學策略，修正教學行為作為下一次教學的參考。

8/10 學活動

一、課中解題多元表徵檢核表

檢核表中，○表示「達成」、☆表示「部分達成」、▲表示「未達成」

表 4-2-1-1 第一、二節課中解題多元表徵檢核表

	小婷	小樺	小澤	小凌	小平
布題情境=>畫圖	○	○	○	○	○
畫圖=>語言	○	○	○	☆	○
語言=>符號	○	○	○	☆	○

資料來源：作者自製

由學生第一、二節課分數學習單答題狀況，可以看出大部分學生能按照教學進度，正確完成課堂中的作答。學生小凌、小平尚未有畫圖解題經驗，因此不知道如何依據題意畫圖，透過其他學童的示範後，已經學會。但小凌仍無法依據圖畫清楚說出分數所代表的意義，研究者於補救教學課餘再與小凌一對一指導、對話，最後小凌能依據所畫圖畫清楚表達自己的想法。

二、教師教學日誌

此堂課資料整理如表 4-2-1-2：

表 4-2-1-2 第一、二節課教學日誌表

教學活動名稱	命名單位分量、真分量(單位分數內容物為單一個物) 第七冊第六單元活動 7、活動 8、活動 10	教學日期	8/10
教學目標	<ol style="list-style-type: none"> 以分母不大於 100 的單位分數數詞，命名「等分後的內容物為單一個物」的單位分量。 解決以「分母不大於 100 的單位分數為被計數單位」的合成問題。 使用真分數數詞(分母≤ 100)，命名「等分後的內容物為單一個物」的單位分量所合成的真分量，並加以記錄。 		
學生的學習與回饋	學習態度: 小凌習慣以「我不會」回應老師，趴在桌上或東張西望。 小澤一開始會找同學聊天，或說「我都不會」。 小樺、小婷、小平能專心操作、畫圖與清楚說出想法。		

	<p>學生心得回饋:</p> <p>小凌:「我不會時，老師會教我，我覺得老師對我很好。」</p> <p>小澤:「一份和一顆我分不清楚，現在我弄懂了。」</p>
<p>教學中發現的迷思概念或學習困難</p>	<p>當題目為離散量，出現 3 種單位時，學生容易將分成的等份和離散量的單位混淆，如:一份&一顆(一個)。</p> <p>若單位分數的概念未釐清，當單位分數內容物為多個個物時，可能會出現以下迷思:2/5 盒是一盒平分成 5 份其中的 2 顆。</p>
<p>教師提問與師生對話釐清概念</p>	<p>布題:</p> <p>一盒雞蛋有 12 個，$\frac{1}{12}$ 盒雞蛋是幾個?</p> <p>S:1 個</p> <p>T:說說看，怎麼想的?</p> <p>S:$\frac{1}{12}$ 盒雞蛋是 12 份，裡面有一個。</p> <p>.....</p> <p>T:(引導學生回顧單位分數數詞的意涵，釐清概念。)</p> <p>好，我們先想一想，</p> <p>一個蛋糕平分成 8 份後的 1 份，我們叫做幾個蛋糕?</p> <p>S:$\frac{1}{8}$ 個</p> <p>.....</p> <p>T:一盒雞蛋有 12 個，把一盒雞蛋平分給 12 人，一個人分到多少盒雞蛋?</p> <p>S:學生思考</p> <p>T:要平分給 12 人，所以要把一盒平分成幾份?</p> <p>S:12 份</p> <p>T:所以一個人得到的在哪兒?</p> <p>S:(學生指其中的一個)</p> <p>T:這一個雞蛋相當於幾份?</p> <p>S:一份</p> <p>T:所以我們把一盒雞蛋平分成 12 份，取其中的一份叫做?</p> <p>S:$\frac{1}{12}$ 盒</p> <p>T:所以說說看，什麼是 $\frac{1}{12}$ 盒</p> <p>S:<u>把一盒平分成 12 份，其中一份，是 $\frac{1}{12}$ 盒。</u></p>

教學活動中的發現與調整(包含教學中及教學後)	<ol style="list-style-type: none"> 1. 小凌一開始會將 $\frac{7}{8}$ 寫成 $\frac{8}{7}$，老師引導小凌說出分母 8、分子 7 在圖中所代表的意義，並在之後的布題中，讓小凌多練習說，穩固概念。 2. 學生對單位分數的概念缺乏，因此第一堂課著重單位分數概念的釐清，並多利用實物操作，讓學生邊操作邊說出想法。
------------------------	---

資料來源：作者自製

8/11 教學活動，依據 8/10 教學當中學童的學習情況進行教學調整，以實施下一堂的教學。

8/11 學活動

一、課中解題多元表徵檢核表

檢核表中，○表示「達成」、☆表示「部分達成」、▲表示「未達成」

表 4-2-2-1 第三、四節課中解題多元表徵檢核表

	小婷	小樺	小澤	小凌	小平
布題情境=>畫圖	○	○	○	○	○
畫圖=>語言	○	○	○	☆	○
語言=>符號	○	○	☆	☆	○

資料來源：作者自製

由學生第三、四節課分數學習單答題狀況，可以看出大部分學生能按照教學進度，正確完成課堂中的作答。小澤雖討論過程中能清楚說出想法，但由於概念不穩固，以致解題表現不穩定，針對小澤、小凌未完全達成的部分，教師再利用課後一對一對話協助釐清，直到能完全達成。

二、教師教學日誌

此堂課資料整理如表 4-2-2-2：

表 4-2-2-2 第三、四節課教學日誌表

教學活動名稱	命名單位分數、真分量(單位分數內容物為多個獨立個物) 第七冊第十單元活動 5、活動 6	教學日期	8/11
教學目標	<ol style="list-style-type: none"> 1. 使用單位分數數詞(分母≤ 12)，命名「等分後的內容物為多個獨立個物」的單位分量。 2. 建立「單位分數所指示的內容物為多個個物」的分數數詞序列。 		
學生的學習與回饋	<p>學習態度:</p> <ol style="list-style-type: none"> 1. 小凌仍顯得有些沒自信，擔心自己寫錯。 2. 布題後，小澤雖遇到不會的，但能積極與老師對話，說出自己的想法，對釐清迷思很有幫助。 3. 小樺、小婷、小平會專心聽講並踴躍回饋。 <p>學生心得回饋:</p> <ol style="list-style-type: none"> 1. 小凌:「我還是會分錯，可是後來就會了。」 2. 小樺:「$\frac{1}{3}$ 袋，原來是一袋平分 3 份，其中的 1 份。我一直把它想成 3 份中有 1 顆。」 3. 小澤:「$\frac{1}{3}$ 袋是一袋平分 3 份，其中的 1 份，這我本來就會了，後來我看到顆，就搞混了。」 		
教學中發現的迷思概念或學習困難	<p>一箱蘋果有 10 顆，把這箱蘋果平分成 5 份後，取中出其中的 1 份，我們說它是多少箱蘋果? 以為分子是把蘋果平分後的顆數，說成 $\frac{2}{5}$ 箱</p>		

<p>教師提問與師生對話釐清概念</p>	<p>T: 題目中把一箱蘋果平分成 5 份後，取出幾份？</p> <p>S: 2 份。</p> <p>T: 2 份在哪裡？</p> <p>S: (學生指著一份中的 2 顆)</p> <p>T: 你指的這是 2 份還是 2 顆？</p> <p>S: 2 顆。</p> <p>T: 這 2 顆蘋果是一箱中的幾份？用手指把 2 顆圈起來看看，這是幾份？</p> <p>S: 1 份</p> <p>T: 所以，把一箱蘋果平分成 5 份(老師用手指圈出 5 份，並請學生數出來)，取其中的 1 份(用手穿其中的 1 份)，我們說它是多少箱蘋果？</p> <p>S: $\frac{1}{5}$ 箱蘋果</p> <p>T: 分母的 5 表示？</p> <p>S: 把一箱平分成 5 份。</p> <p>T: 分子的 1 表示？</p> <p>S: 其中的 1 份。</p>
<p>教學活動中的發現與調整(包含教學中及教學後)</p>	<ol style="list-style-type: none"> 1. 本節課強調學生以分數詞回答時，應清楚描述:A:把一單位量平分成幾份。B:取出幾份。 2. 在將單位量平分時，請學生確認是否平分。 3. 當題目中多了內容物的單位(個、瓶、顆.....)後，學生原本已建立的單位分量命名會受到影響。 4. 小婷、小平雖在前測時概念不清，有前述第 2 點所述的迷思，但經過畫圖後能依據所畫的圖說出想法，並順利完成「單位分量」命名。 5. 小樺、小澤、小平、小凌一開始將分成的等份量和離散量的單位混淆，教師運用實物操作、圖像，透過對話正確命名「等分後的內容物為多個獨立個物」的單位分量。 6. 學生對單位分數的概念尚未穩固，當題目為離散量，出現多種單位時，學生仍容易將分成的等份量和離散量的單位混淆，因此針對定義與命名單位分數再加強釐清和對話，以穩固概念。

資料來源：作者自製

8/12 教學活動，依據 8/11 教學當中學童的學習情況進行教學調整，以實施下一堂的教學。

8/12 學活動

一、課中解題多元表徵檢核表

檢核表中，○表示「達成」、☆表示「部分達成」、▲表示「未達成」

表 4-2-3-1 第五、六節課中解題多元表徵檢核表

	小婷	小樺	小澤	小凌	小平
布題情境=>畫圖	○	○	○	○	○
畫圖=>語言	○	○	○	○	○
語言=>符號	○	○	○	○	○

資料來源：作者自製

由學生第五、六節課分數學習單答題狀況，可以看出大部分學生能按照教學進度，正確完成課堂中的作答。雖然課堂上，在不同表徵的轉換過程中產生一些迷思，但經過提問與對話後，都能釐清概念。

二、教師教學日誌

此堂課資料整理如表 4-2-3-2：

表 4-2-3-2 第五、六節課教學日誌表

教學活動名稱	單位分數 第七冊第十單元活動 7	教學日期	8/12
教學目標	在單位分數所指示的內容物為多個個物的情境下，聽到分數(≤ 1)的數詞或看到分數(≤ 1)的數字，拿出相當數量的具體物。(分母 ≤ 12)		

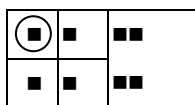
學生的學習與回饋	<p>學習態度:</p> <ol style="list-style-type: none"> 1. 小凌雖然畫圖時遇到困難，但能說出自己的想法，願意嘗試重新畫圖解題。 2. 小澤專注解題，踴躍說出想法。 3. 小樺與小婷會專心聽講並踴躍回饋。 <p>學生心得回饋:</p> <ol style="list-style-type: none"> 1. 小凌:「我本來以為一份要分一顆，現在我會分了，是要平分。」 2. 小澤:「我本來不知道要怎麼分，現在我會了，原來就是用除法分，這我本來就會了。」
教學中發現的迷思概念或學習困難	<ol style="list-style-type: none"> 1. 看到分子是 1 時，會認為 1 指的是單位內容物個數是 1。 例如: 一盒積木有 8 個，$\frac{1}{4}$ 盒的 1 表示把 1 盒平分後每一份有 1 個積木。



教師提問與師生對話釐清概念

一盒積木有 8 個， $\frac{1}{4}$ 盒有幾個積木？

S:(圖示如下， $\frac{1}{4}$ 盒=1 個)



T:說說看，什麼是 $\frac{1}{4}$ 盒？

S:把一盒平分 4 份，其中的一份

T:你有把一盒平分成 4 份嗎？

S:有(學生指著左邊的 4 份，1 份各 1 個)

T:(老師指著右邊的 1 份)再加上這一份總共是幾份？

S:5 份

T:而且我們有沒有做到平分？

S:沒有，有的 1 個，有的 4 個。

T:12 個積木要平分成 4 份，你會不會分？

S:我不會分

T:(指著第 5 份)這 4 個你還沒分，你試試看，把 4 個積木平分到左邊的 4 份中。

S:(學生把 4 個積木平分到 4 份中，每份中有 2 個積木了。)

T:我們檢查一下，有沒有把一箱平分成 4 份？

S:有(數著 1 份、2 份、3 份、4 份)

T:好，有分成 4 份。那你有平分嗎？

S:有

T:你怎麼檢查的？

S:因為每份都是 2 個

T:很好，那現在你知道 $\frac{1}{4}$ 盒和幾個積木一樣多嗎？

S:2 個。

<p>教學活動中的發現與調整(包含教學中及教學後)</p>	<ol style="list-style-type: none"> 1. 教學者原本將此節設定為補救教學的第一節，但布題後發現學生有上述 1 與 2 的迷思概念，因此循著 82 年版數學教材教法找出學生的可能的起點行為，針對未學得的概念往前補救，因此教學設計增加了第一節、第二節、第三節、第四節，此四節皆不屬於等值分數的教學範圍，但為學生學習等值分數的重要基礎概念。 2. 在例題:一盒積木有 8 個，$\frac{1}{4}$ 盒有幾個積木?小婷能將一盒 8 顆平分成 4 份，但 $\frac{1}{4}$ 盒說成 4 份中有 1 個。因此在圖畫中會看到小婷用 4 個圈圈將 1 盒平分 4 份，但只把其中一個圈圈中的 1 個圖黑。 3. 小凌一開始認為 $\frac{1}{4}$ 盒有有(1)個積木。因為看到分子的 1 即代表積木有 1 個，所以未能 8 個積木拿來平分。 4. 經過第一節與第二節的補救釐清，對於此節的活動教學，多數學生能順利解題。唯有小凌畫圖平分單位量時仍感困難，教學者發現是小凌在整數除法分分看的概念尚未穩固，因此利用課餘一對一加強除法分分看，加強小凌分分看看的概念。 5. 較多學生對分數中分子的定義仍不甚穩固，因此再加強實務操作與畫圖，確認學生能平分，且能檢查有沒有平分，在圖中順利圈出分母所代表的份數(並數出來)及指出其中的 1 份，和指出 1 份中的內容物個數，並清楚定義說出分子在分數中代表的意思。
-------------------------------	--

資料來源：作者自製

8/13 教學活動，依據 8/12 教學當中學童的學習情況進行教學調整，以實施下一堂的教學。

8/13 學活動

一、課中解題多元表徵檢核表

檢核表中，○表示「達成」、☆表示「部分達成」、▲表示「未達成」

表 4-2-4-1 第七、八節課中解題多元表徵檢核表

	小婷	小樺	小澤	小凌	小平
布題情境=>畫圖	○	○	○	○	○
畫圖=>語言	○	○	○	○	○
語言=>符號	○	○	○	○	○

資料來源：作者自製

由學生第七、八節課分數學習單答題狀況，可以看出大部分學生能按照教學進度，正確完成課堂中的討論與作答。

二、教師教學日誌

此堂課資料整理如表 4-2-4-2：

表 4-2-4-2 第七、八節課教學日誌表

教學活動名稱	異分母分數比大小 第九冊第六單元活動 1、活動 2	教學日期	8/13
教學目標	1. 在離散量的情境下，進行兩個真分數詞(字)所描述的量的比較問題。(單位量的內容物 ≤ 36 或 $= 100$) 2. 在離散量的情境下，進行兩個真分數詞(字)所描述的量的比較問題，並記錄比較結果。(單位量的內容物 ≤ 36 或 $= 100$)		
學生回饋單	學習態度: 學生踴躍發表自己的想法，並願意嘗試不同的方式，或一步一步畫圖找答案。 學生心得回饋: 1. 在這裡上數學課如果不會可以用畫的，以前沒有畫會很慢，而且容易錯，也不知道哪裡錯。用畫的比較好懂，看圖比較好懂，只寫字要想很久。 2. 不會可以用畫的，就不會無聊了，而且畫好了會覺得自己很厲害，因為自己懂了。		

<p>教學中發現的迷思概念或學習困難</p>	<p>學生以為 $5/12$ 盒 12 份，$3/8$ 盒有 8 份，相較之下 $5/12$ 盒的 12 份比較多；而且 $5/12$ 盒取其中 5 份，$3/8$ 盒取中的 3 份，相較之下 $5/12$ 盒的 5 份較多。因此，認為 $5/12$ 盒比 $3/8$ 多。</p>
<p>教師提問與師生對話釐清概念</p>	<p>一盒彩色筆有 24 枝。$3/8$ 盒彩色筆和 $5/12$ 盒彩色筆，誰比誰多？</p> <p>S:$3/8$ 盒比較多。</p> <p>T:說說看，為什麼？</p> <p>S:12 份比 8 份多，分子的 5 份也比 3 份多。</p> <p>T:我們來想想看，什麼是 $3/8$ 箱？</p> <p>S:把一盒平分 8 份，其中的 3 份。</p> <p>T:1 份有幾枝？</p> <p>S:3 枝</p> <p>T:取出 3 份共幾枝？</p> <p>S:9 枝</p> <p>T:9 枝怎麼算出來的？</p> <p>S:1 份是 3 枝，2 份是 6 枝，3 份是 9 枝</p> <p>T:再來，我們想想看，$5/12$ 箱彩色筆是幾枝？</p> <p>S:10 枝</p> <p>T:說說看，10 枝是怎麼算出來的？</p> <p>S: $5/12$ 箱是把一盒平分 12 份，其中的 5 份。</p> <p>S:1 份是 2 枝，5 份是 10 枝</p> <p>T:所以，$3/8$ 盒彩色筆和 $5/12$ 盒彩色筆，誰比誰多？</p> <p>S:$5/12$ 盒比較多</p> <p>T:為什麼？你是怎麼比出來的？</p> <p>T:是拿幾盒來比呢？還是拿幾枝來比的？</p> <p>S:拿幾枝彩色筆來比，10 枝比較多</p> <p>T:10 枝比幾枝多？</p> <p>S:比 9 枝多</p> <p>T:所以合起來怎麼說？</p> <p>S:10 枝比 9 枝多</p> <p>T:用盒說說看，$3/8$ 盒彩色筆和 $5/12$ 盒彩色筆，誰比誰多？</p> <p>S:$5/12$ 盒比 $3/8$ 盒多</p> <p>T:很好，那怎麼記呢？</p> <p>S:$5/12 > 3/8$(用筆記錄)</p>

教學活動中的發現與調整(包含教學中及教學後)	<ol style="list-style-type: none"> 1. 學生一開始先嘗試用「盒」比較兩分數的大小。以為 $5/12$ 盒 12 份, $3/8$ 盒有 8 份, 相較之下 $5/12$ 盒的 12 份比較多; 而且 $5/12$ 盒取其中 5 份, $3/8$ 盒取中的 3 份, 相較之下 $5/12$ 盒的 5 份較多, 所以認為 $5/12$ 盒比 $3/8$ 多。 2. 因此, 老師另佈題, 一盒彩色筆有 15 枝。$1/3$ 盒彩色筆和 $1/5$ 盒彩色筆, 誰比誰多?讓學生思考, 相同的一盒彩色筆, 平分成愈多份, 則其中 1 份代表的量較少; 平分成愈少份, 則其中 1 份代表的量較多。 3. 此堂課佈題, 從比較真分數大小開始, 發覺學生對單位分數的大小比較有迷思, 因此調整佈題方向, 先穩固單位分數的大小比較, 再進入真分數大小比較, 循序漸進, 釐清概念。
------------------------	--

資料來源：作者自製

8/14 教學活動，依據 8/13 教學當中學童的學習情況進行教學調整，以實施下一堂的教學。

8/14 學活動

一、課中解題多元表徵檢核表

檢核表中，○表示「達成」、☆表示「部分達成」、▲表示「未達成」

表 4-2-5-1 第九、十節課中解題多元表徵檢核表

	小婷	小樺	小澤	小凌	小平
布題情境=>畫圖	○	○	○	☆	○
畫圖=>語言	○	○	○	☆	○
語言=>符號	○	○	○	☆	○

資料來源：作者自製

由學生第九、十節課分數學習單答題狀況，可以看出大部分學生能按照教學進度，正確完成課堂中的作答。唯小凌受整數除法的影響，雖前面幾堂的操作已經習得應有概念，但有時還是會分錯，針對此部分研究者在課餘個別加強釐清小

凌除法分分看的概念，協助跨越學習困境。

二、教師教學日誌

此堂課資料整理如表 4-2-5-2：

表 4-2-5-2 第九、十節課教學日誌表

教學活動名稱	找出等值分數 第九冊第十二單元活動 8-1	教學日期	8/14
教學目標	<p>在離散量的情境下，給定單位量及單位分量(兩者不互質)，使用分數數詞(字)描述此單位分量，並察覺各種分數值彼此等值。</p> <p>例:12 張色紙裝一包，6 張色紙是 $6/12$ 包、$3/6$ 包、$2/4$ 包、$1/2$ 包。</p>		
學生回饋單	<p>學習態度: 雖然在找出 6 張色紙是 $6/12$ 包之後，大部分學生對找出其它答案感到困難，但還是能努力畫圖嘗試。</p> <p>學生心得回饋:</p> <ol style="list-style-type: none"> 1. 小澤覺得很像腦筋急轉彎的題目，會很想挑戰，自己也有挑戰成功。 2. 小澤、小凌:「分法不一樣($6/12$ 包、$3/6$ 包、$2/4$ 包、$1/2$ 包)，可是算出來都是 6 張ㄟ!」 		
教學中發現的迷思概念或學習困難	<p>布題:一包色紙 12 張，6 張色紙是多少包?</p> <p>學生能將 12 張色紙平分成 2 份，但將圖畫中的 1 份(6 張)，說成 $6/12$ 包。</p>		

<p>教師提問與師生對話釐清概念</p>	<p>T:說說看，為什麼這六張色紙是 $6/12$ 包? S:因為有 12 張，其中的 6 張。 T:看看你畫的圖，你把 1 包平分成幾份? S:2 份。(請學生用手指出所說的 2 份) T:你圈起來的 6 張(用手指出)是幾份? S:1 份。 T:所以把 1 包平分成 2 份，取其中的 1 份，是多少包? S:$1/2$ 包。 T:很好。</p> <p>T:那我們再想想看，6 張色紙也可以說成 $6/12$ 包嗎? T:什麼是 $6/12$ 包?(一包色紙怎麼分) S:把 1 包平分成 12 份，取其中的 6 份。 T:說得很好，那其中一份是幾張? S:1 張。 T:所以其中 6 份就是..... S:6 張。 T:$6/12$ 包是 6 張。 T:$1/2$ 包也是 6 張。 我們可以說 $1/2$ 包和 $6/12$ 包的關係是? S:相等 T:所以我們將兩個分數的關係記作 $1/2(=)6/12$</p>
<p>教學活動中的發現與調整(包含教學中及教學後)</p>	<ol style="list-style-type: none"> 1. 一開始學生能很快說出 6 張色紙是 $6/12$ 包，但未能繼續找出其它等值的分數。 2. 經過釐清理解 $6/12$ 包是將 1 包平分成 12 等份，取其中 6 份，為 6 張色紙。之後再題示「1 包紙平分成幾份後，拿走其中的幾份?和 6 張色紙一樣多?」學生便能一提示順利找出其他等值分數。 3. 此活動讓學生畫圖分分看，除了提示學生思考:「1 包紙平分成幾份後，拿走其中的幾份?和 6 張色紙一樣多?」之外，並鼓勵學生嘗試不同分法，找到其他可能的答案。

資料來源：作者自製

8/17 教學活動，依據 8/16 教學當中學童的學習情況進行教學調整，以實施下一堂的教學。

8/17 學活動

一、課中解題多元表徵檢核表

檢核表中，○表示「達成」、☆表示「部分達成」、▲表示「未達成」

表 4-2-6-1 第十一、十二節課中解題多元表徵檢核表

	小婷	小樺	小澤	小凌	小平
布題情境=>畫圖	○	○	○	☆	○
畫圖=>語言	○	○	○	☆	○
語言=>符號	○	○	○	☆	○

資料來源：作者自製

由學生第十一、十二節課分數學習單答題狀況，可以看出大部分學生能按照教學進度，正確完成課堂中的作答。小澤雖解題較慢，但會有耐心思考，逐步釐清。而小凌解題時，仍然需要一對一指導，利用提問慢慢引導解題，若獨自解題仍感到困難。

二、教師教學日誌

此堂課資料整理如表 4-2-6-2：

表 4-2-6-2 第十一、十二節課教學日誌表

教學活動名稱	找出等值分數 第九冊第十二單元活動 8-2	教學日期	8/17
教學目標	在離散量的情境下，給定單位量及單位分量(兩者不互質)，使用分數數詞(字)描述此單位分量，並察覺各種分數值彼此等值。 例：一盒蘋果有 16 個。12 個蘋果是多少盒？ 是 $12/16$ 盒、 $6/8$ 盒、 $3/4$ 盒。		

<p>學生回饋單</p>	<p>學習態度: 學生在前幾堂課概念釐清後，已經逐漸能掌握對找出等值分數的方法，課堂上對於自己的解題方法十分踴躍分享，即使在粗心算錯時，也會期待下一次布題，把解題當作一種挑戰，躍躍欲試。</p> <p>學生心得回饋:</p> <ol style="list-style-type: none"> 1. 小澤:「我覺得等值分數很簡單，就算有時候不能一下子解出來，我只要畫圖想想看就會了。」 2. 小婷:「我喜歡老師用問的方法讓我們想一想，如果直接告訴我們怎麼做，我以後還是不會。」 3. 小樺:「我想不出來的時候，老師會問我『一盒蘋果平分成幾份後，拿走其中的幾份?和 12 顆蘋果一樣多?』這樣我就比較容易想出來了」
<p>教學中發現的迷思概念或學習困難</p>	<p>布題: 一盒蘋果有 16 個。12 個蘋果是多少盒?</p> <ol style="list-style-type: none"> 1. 有的學生會嘗試將1盒的16個平分成2份(1份有8個)，卻忽略12個蘋果無法平分成8個1份。 2. 學生會先將12個蘋果平分成4份(1份有3個)，卻忽略 16 個蘋果無法平分成 3 個 1 份。

<p>教師提問與師生對話釐清概念</p>	<p>迷思一: 學生會嘗試將1盒的16個平分成2份(1份有8個), 卻忽略 12 個蘋果無法平分成 8 個 1 份。</p> <p>S: (畫 16 個圈圈代表 16 個蘋果, 並將 1 盒蘋果 16 個平分成 2 份, 1 份有 8 個。但無法想不出該取其中幾份才會和 12 個蘋果一樣多。)</p> <p>T:想想看, 取其中一份是幾個蘋果? 取其中二份是幾個蘋果?</p> <p>S:取一份是 8 個蘋果; 取二份是 16 個蘋果, 但都不是 12 個。</p> <p>T:對啊!你有發現了</p> <p>那我們一起來想想看, 一盒蘋果還能怎麼平分?可以讓我們拿其中的幾份後會和 12 顆蘋果一樣多?</p> <p>S:(學生放聲思考, 一盒不能分成 3 等份....., 那我把它平分成 4 份, 其中一份是 4 個蘋果, 取其中 3 份, $4 \times 1 = 4$, $4 \times 2 = 8$, $4 \times 3 = 12$, 找到了!)</p> <p>把一盒蘋果平分成 4 份後, 拿走其中的 3 份, 和 12 顆蘋果一樣多。</p> <p>T:你做到了!那我們再想一想, 把一盒蘋果平分成 4 份後, 拿走其中的 3 份是幾盒蘋果呢?</p> <p>S:$\frac{3}{4}$ 盒蘋果。</p> <p>T:答對了!</p> <p>(之後繼續引導學生想想看, 還有沒有其中分法? 最後再一起歸納 $\frac{3}{4} = \frac{6}{8} = \frac{12}{16}$)</p> <p>.....</p> <p>迷思二:學生會先將12個蘋果平分成4份(1份有3個), 卻忽略 16 個蘋果無法平分成 3 個 1 份。</p> <p>T:當我們把12個蘋果平分成4份時(1份有3個), 那麼剩下的蘋果是幾個?</p> <p>S:4個</p> <p>T:這4個蘋果是幾份呢?</p> <p>S:一份</p> <p>T:你數數看, 你把一盒蘋果平分成幾份?</p> <p>S:5份(其中4份各有3個, 第5份是4個)</p> <p>T:再仔細看看, 你有平分嗎?</p> <p>S:沒有</p> <p>T:所以, 12個蘋果能夠平分成1份3個, 但一盒蘋果16個不能被平分成一份3個。</p> <p>(之後繼續引導學生想想看, 還有沒有其中分法是可行的? 最後再一起歸納$\frac{3}{4} = \frac{6}{8} = \frac{12}{16}$)</p>
----------------------	---

<p>教學活動中的發現與調整(包含教學中及教學後)</p>	<p>1. 此活動讓學生畫圖分分看，除了提示學生思考:「1包紙平分成幾份後，拿走其中的幾份?和6張色紙一樣多?」之外，並鼓勵學生嘗試不同分法，找到其他可能的答案。</p> <p>2. 一盒蘋果有16個，12個蘋果是多少盒? 小凌一開始能從1盒蘋果中正確畫出6/12盒，之後無法繼續找出其它的分法，感到困難後便停筆，露出不悅表情，老師上前問:「1盒蘋果怎麼分，可以剛好分完?」「我們來試試看!」，老師一對一引導小凌一步一步解題，並在小凌做到時，鼓勵她:「妳會分捏，再多想一想就辦得到了!好棒!」小凌:「對啊!我會了!」小凌接下來也願意繼續嘗試找出其它可能的答案。</p> <p>3. 學生在前一堂課時，已經學會思考:「當1盒蘋果平分成幾份後，拿走其中的幾份會和12個蘋果一樣多。」但有的學生會嘗試將1盒的16個平分成2份(1份有8個)，卻忽略12個蘋果無法平分成8個1份。或者，有的學生會先將12個蘋果平分成4份(1份有3個)，卻忽略16個蘋果無法平分成3個1份。因此此堂課的重點針對上述情況，加強與學生對話，說出其中合理與不合理之處，進一步釐清概念。</p>
-------------------------------	---

資料來源：作者自製

8/18 教學活動，依據 8/17 教學當中學童的學習情況進行教學調整，以實施下一堂的教學。

8/18 學活動

一、課中解題多元表徵檢核表

檢核表中，○表示「達成」、☆表示「部分達成」、▲表示「未達成」

表 4-2-7-1 第十三、十四節課中解題多元表徵檢核表

	小婷	小樺	小澤	小凌	小平
布題情境=>畫圖	○	○	○	○	○
畫圖=>語言	○	○	○	○	○
語言=>符號	○	○	○	☆	○

資料來源：作者自製

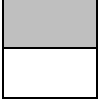
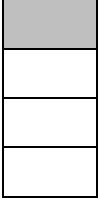
由學生第十三、十四節課分數學習單答題狀況，可以看出大部分學生能按照教學進度，正確完成課堂中的作答。在第十一、十二堂課的提問與對話釐清，學童已經習得在離散量的情境下，找出各種分數值，因此在第十三、十四節課，面對度量化的連續量或連續量的情境布題時，能很順利釐清題意並進行解題。

二、教師教學日誌

此堂課資料整理如表 4-2-7-2：

表 4-2-7-2 第十三、十四節課教學日誌表

教學活動名稱	找出等值分數 第九冊第十二單元活動 8-3	教學日期	8/18
教學目標	在離散量的情境下，給定單位量及單位分量(兩者不互質)，使用分數數詞(字)描述此單位分量，並察覺各種分數值彼此等值。 <u>(將離散量情境改為度量化的連續量或連續量)</u> 例：一塊蛋糕平分成若干等份， $1/2$ 塊、 $2/4$ 塊、 $3/6$ 塊、 $4/8$ 塊……等值。		
學生回饋單	學習態度： 經過第十一、十二堂課的學習活動，學生對於在離散量情境中找出等值分數已有相當穩固概念，因此將習得概念遷移至連續量情境，學生感到相對容易。因此本節活動進行中，學生學習十分踴躍積極，期待挑戰新的布題。 學生心得回饋： 1. 小樺、小平：「我覺得題目很簡單，很快就可以找到答案。」 2. 小婷：「我覺得題目不會很難，上一次我就學會了，這一次雖然題目不一樣，但很快就可以解出來。」 3. 小澤：「我一開始有點搞混，後來我懂了，就變得很快(很快解題)。」		

<p>教學中發現的迷思概念或學習困難</p>	<p>布題: $\frac{1}{2}$ 塊蛋糕和 4 分之幾塊一樣多?</p> <p>小澤先畫一塊蛋糕，將一塊蛋糕平分成兩份，其中一份(灰色區塊)表示 $\frac{1}{2}$ 塊</p>  <p>之後，在原來的 1 塊下面再加畫 2 份，最後表示其中 1 份(灰色區塊)是 $\frac{1}{4}$ 塊。($\frac{1}{2} = \frac{1}{4}$)</p> 
------------------------	--



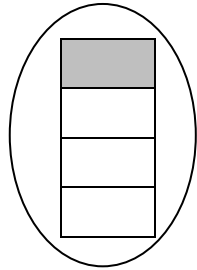
教師提問與
師生對話釐
清概念

T:題目問 4 分之幾塊?是把誰拿來分?平分成幾份?

S:把一塊拿來分。平分成 4 份。

T:一塊蛋糕在哪兒?用手指圈起來。

S:(用手圈出)



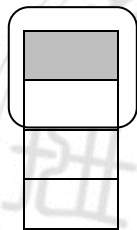
T:我們再想想看，一開始你是怎麼畫出 $1/2$ 塊的?

S:我先畫出一塊，再把一塊平分成兩份

(學生邊說邊指出相對應的區塊)

T:所以一開始你畫的一塊蛋糕在哪裡?

S:(用手圈出)

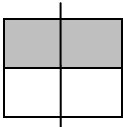


T:對，一塊在這兒(用手再指一次)

我們先把下面多餘的擦掉，留下一塊蛋糕(將下方兩格塗掉)

再來想想，4 分之幾塊是把一塊平分成幾份?

S:把一塊平分成 4 份。

	<p>T:好，你試試看把一塊平分成 4 份，用筆畫畫看</p> <p>T:記得要平分</p> <p>S:(學生用筆順利將一塊平分成 4 份)</p>  <p>T:好，那剛剛灰色的部份，現在變成幾份?</p> <p>S:2 份。</p> <p>T:所以把一塊平分成 4 份，取其中的 2 份，是幾分之幾塊?</p> <p>S:2/4 塊</p>
<p>教學活動中的發現與調整(包含教學中及教學後)</p>	<p>布題:1/2 塊蛋糕和 4 分之幾塊一樣多? 教學中提問:「當 1 塊蛋糕平分成 4 份後，取其中的幾份會和 2 分之 1 塊一樣多。」並且觀察學生以下做法:</p> <ol style="list-style-type: none"> 1.是否能順利將原本的一塊 2 等份，平分成一塊 4 等份。 2.分割後的每等份是否平分。

資料來源：作者自製

第三節 補救教學後學習成效之探討

本節主要探討研究對象經補救教學後的學習成效。後測卷題目共計 20 題，研究者根據後測結果並與學生晤談，進行分析，以了解學生在前後測之間學生概念之改變結果為何。並完成研究目的四 「 探討運用「82 年數學分數教材」進行補救教學後之成效，及學生錯誤概念之改變情形。 」

壹、學童在前測與後測的答題比較分析

研究者透過前測卷與後測卷做比對，研究者將各學童前測卷與後測卷之答對題數換算成答對率做成以下整理，如表 4-3-1：

表 4-3-1 前測與後測學童答對題數與答對率之比較統計表

學生	小婷	小樺	小澤	小凌	小平
前測答對題數	12	10	8	6	10
前測答對率	60%	50%	40%	30%	50%
後測答對題數	20	19	17	14	18
後測答對率	100%	95%	85%	70%	90%
進步幅度	40%	45%	45%	40%	40%

資料來源：作者自製

研究者再將上表之前測與後測之答對率，轉換成長條圖做比較，如圖 4-3-1：

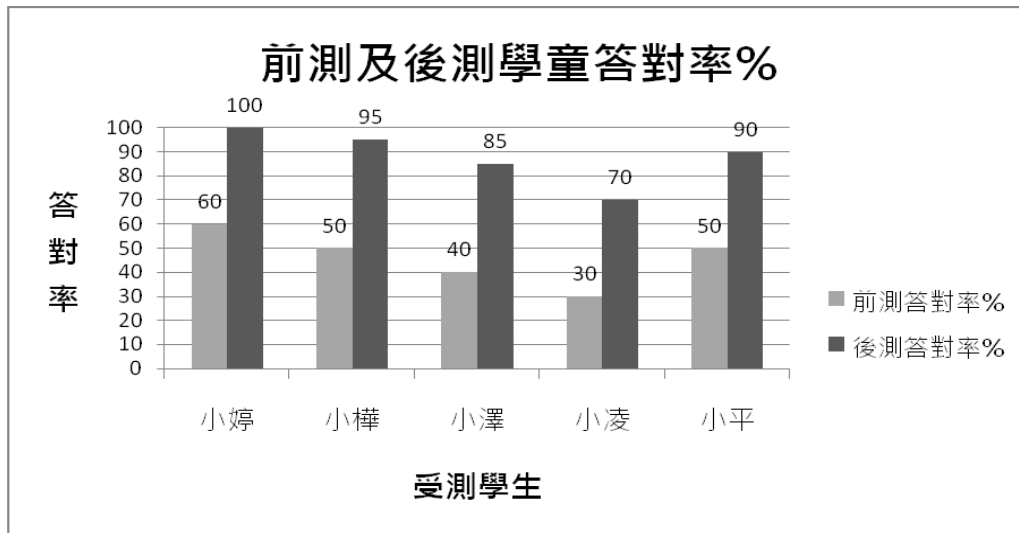


圖 4-3-1 前測與後測學童答對率之比較長條圖

資料來源：作者自製

由上表 4-3-1 及圖 4-3-1 可知，研究者透過 82 年版「等值分數」教材之教學活動設計融入補救教學活動後，五位學童的表現都有進步，學童的答對率平均增加了 42%。小婷進步幅度 40%；小樺進步幅度 45%；小澤進步幅度 45%；小凌進步幅度 40%；小平三年級進步幅度 40%。

總結來說，學生大致能達成等值分數的能力指標，足見本研究運用 82 年版「等值分數」教材的補救教學活動，確實有增進學生「等值分數」概念的學習，且能促進學童在多元表徵的轉換，因此本研究運用「82 年版數學等值分數教材」進行補救教學，對學生的學習成效有相當大的效益。尤其是多數的學童在進行解題時，已經學會嘗試用圖畫表徵去理解題目的意思，而不是直接猜答。學童也較不會在遇到困難時就直接放棄，會嘗試自己畫圖做做看或提出問題和老師討論，學童清楚表示，畫圖或與老師對話都能幫助自己思考怎麼解題，在數學課時不會再像以前一樣覺得很無聊，因為現在已經學會找方法自己解題。

第五章 研究結論

本研究旨在探討運用 82 年版數學分數教材，搭配鷹架理論教學策略進行國小四升五年級之學童分數補救教學之歷程與成效，其研究結果已於第四章闡述。本章將統整分析的結果，針對本研究中的研究問題及發現，在第一節中說明研究結論，第二節則針對未來教師在等值分數的教學，運用多元表徵-對話、具體操作、畫圖解題等策略，進行等值分數補救教學活動之課程設計與實施，及未來研究等方面提出建議，以作為往後相關教學研究的參考。

第一節 研究發現

本研究主要目的是透過五名四升五年級學童的補救教學研究，參照 82 年版數學分數教材，運用多元表徵-對話、具體操作、畫圖解題等策略，進行補救教學活動。根據研究結果，依補救教學前之發現、補救教學中之發現以及補救教學後之發現三方面，歸納出以下的結論：

壹、補救教學前之發現

根據五名研究個案在前測試題的答題表現，研究者發現學童在等值分數概念的學習常見的迷思有：

- 一、缺乏「部份-整體」概念
- 二、單位量概念不穩固，忽略或混淆單位量詞
- 三、分數概念不穩固，將等分割數與基準量單位混淆
- 四、等分割概念不足
- 五、對離散量內多的情境題感到困難

綜合以上分析，研究者發現許多學生前測的錯題，多數源自於對分數基本概念存在迷思，以致於影響之後等值分數相關概念的建立。進一步分析，後四類的錯誤迷思有部份的原因來自於缺乏「部份-整體」概念。亦即缺乏「部份-整體」概念，學童容易因題型的不同、情境的不同，而有不同的解讀，容易將分數的分子及分母分開思考而出現錯誤。

貳、補救教學中之發現

一、教材中所列「預備經驗」有助回溯學童起始行為，有效進行補救

教材中，對於每一個新的教學活動，皆說詳細說明預備經驗。例舉：第九冊第六單元活動 1，教學活動為在離散量的情境下，進行兩個真分數詞(字)

所描述的量的比較問題。(單位量的內容物 ≤ 36 或 $= 100$)，同時提供此活動的預備經驗為：在「單位分數所指示的內容物為多個個物」的情境下，聽到分數(分母 ≤ 12)的數詞或看到分數的數字，拿出相當數量的具體物(第七冊第十單元)。進行第九冊第六單元活動 1 之前，若學生預備經驗缺乏，研究者依據教材中所列「預備經驗」相對應的教學活動，回溯學童起始行為，進行補救。能提供教學者清晰明確的教學地圖。

二、布題脈絡分明，能讓學童循序漸進習得概念

(一) 82 年數學分數-等值分數教材將分數問題情境分為：1.單位分數內容物為單一個物。2.單位分數內容物為多個個物。在進行單位分數內容物為多個個物之前，先以單位分數內容物為單一個物做布題，對學童而言較容易能從舊經驗中延伸、學習新概念，順利完成學習遷移。

(二) 先進行「單位分數所指示的內容物為多個個物」的情境布題，再進行「真分數所指示的內容物為多個個物」的情境布題。先讓學童學得單位分數所代表的內容物，概念穩固後，再學習找出真分數數詞所代表的量，能增進學習效益。

三、82 年版「等值分數」教材提供「學生可能的想法」及「解題策略」，協助教師理解教材脈絡，進行有效備課，所以能促進教與學效能。

82 年版分數數學教材，在每一個教學活動中詳細舉例「學生可能的想法」，及相對應的「解題策略」。教學者在課堂進行前，對學童在學習新概念的思維及可能的解題想法能有充分的了解，能提供教師教學前熟悉與理解學童可能的學習模式，事先掌握課堂上所可能發生的情況，適時察覺學童的需求，有助課堂上順

利進行有效對話及引導，增進教學效能。

在補救教學活動進行前、中、後，研究者依據 82 年版分數數學教材中「學生可能的想法」及「解題策略」反覆研讀、操作及反思教學活動，教師能熟悉學童的學習思維，方能接納、理解、並有效因應，適時加以提示、示範，引導合宜策略，有助教師教學效能與學童有效學習。

四、82 年版「等值分數」教材使用「提問」策略，讓學生進行解題的理解與反思，主動建構數學概念，所以有助於引導學生釐清迷思，建立正確概念。

教學活動中，有效的提問及問好問題，是使教與學達成目標的關鍵，而 82 年版「等值分數」教材正提供很好的提問示範。對一個生手教師而言，課堂中的提問只能靠自己摸索，若有一個能提供示範的參考，能順利協助教學者在如何問好問題上有效的成長與精進。

82 年版「等值分數」教材中，以「說說看，你是怎麼知道的？」、「說說看，你是怎麼算的？」或是「說說看，你是怎麼記的？」進行提問，或是以提示型的提問，如：「1 包色紙平分成幾份後，拿出其中的幾份，和 6 張色紙一樣多？」引導學童對解題的做法進行反思。

同時也透過提問引起參與，並引導解題者組織策略、澄清想法、發現關係或規則，例如：以問句「這些答案的記法為什麼會不一樣？」協助釐清想法，理解「分法雖然不一樣，但代表的值是相等的。」的概念

五、82 年版「等值分數」教材之教學活動設計透過畫圖與對話進行，能促進學生多元表徵轉換並建立完整概念。

低成就學童因分數概念薄弱，因此分數對他們而言儼然是一種抽象符號，若能透過圖像表徵，依照題目情境將圖像畫出來，方能讀懂和釐清題意。因此，以畫圖方式引導學童將抽象情境化為具體，透過多元表徵加以呈現，在解題過程中，再輔以有效的對話，讓學童指著圖像說出自己的想法，在對話過程中不斷修正與釐清概念，方能協助學童更加理解分數之涵義。

而在離散量內多情境的題目類型，學童普遍存在迷思，此時透過圖像表徵與

對話，能引導學生喚起整數除法概念，並和除法平分概念結合，進一步釐清迷思。而對於低成就孩子而言，從畫圖理解到形成符號表徵是較感困難的，因此教學者與學習者間的對話引導，也成為兩者間轉譯的重要鷹架，能協助學童真正釐清與獲得正確完整的分數概念。

研究者也發現，對學習弱勢學童，一對一的對話與引導能增進學習效益，在充分與有效的對話過程中，找出學童獨特的思維模式，針對其迷思概念，逐步釐清，才能有效增進學習。每個學童學習的發展階段不一，具有個別差異。一個概念，一個布題，對於不同的學生，引發的困難點不盡相同。透過一對一對話能找出問題點，釐清學習困難，再依循 82 年版分數教材的教材地圖，有脈絡的布題、引導、釐清概念，能順利協助學童習得概念。

六、鷹架策略能提供安全溫暖學習環境，對提升學童之學習自信有益。

研究者發現，在整個補救教學過程中，當學童缺乏學習動機時，適時傾聽，了解其實際困難，透過對話循序漸進引導，能提供良好的學習鷹架。小凌經過合宜的對話引導，原本意興闌珊的態度，逐漸在過程中獲得成功解題經驗，加上研究者的正面鼓勵，能立即提升學童學習動力與信心，轉而積極面對接下來的課堂學習。

研究者引導解題過程中，提供實物操作與畫圖等多元表徵策略，運用具像操作與觀察，代替抽象的符號與講述，更能貼近學童的舊經驗與思維模式，使其從自己的經驗中，建構與理解數學概念。小澤根據題目中的分數詞，透過畫圖操作，能將基準量等分成數份後，表現分量，順利計數分數詞所代表的內容物。小澤表示，這是他初次嘗試畫圖解題，並發現畫圖能將問題以具像呈現，問題簡化的同時也隨之迎刃而解，成功經驗幫助小澤找到學習數學的信心。

參、補救教學後之發現

一、以 82 年版「等值分數」教材實施補救教學，學生表現分數有顯著提升

在 82 年版「等值分數」教材實施補救教學後，研究對象的表現分數有顯著提升。五名個案在接受補救教學之後，進行試題後測，將後測答對情形與教學前所進行的前測相對照，發現小婷整體的答對率由前測 60%，提升到後測 100%，進步了 40%；小樺整體的答對率由前測 50%，提升到後測 95%，進步了 45%；小澤由前測的答對率 40%，提升到後測答對率 85%，進步了 45%；小凌由前測的答對率 30%，提升到後測答對率 70%，進步了 40%；小平由前測的答對率 50%，提升到後測答對率 90%，進步了 40%。五名學童後測成績均優於前測，顯示 82 年版「等值分數」教材實施補救教學能提高學童「等值分數」學習成效，表現分數有顯著提升。

二、依據學習者不同的特質，靈活運用 82 年版「等值分數」教材，不斷從教學中修正與調整教學策略，有助於提昇教與學效能。

經過研究者運用 82 年版國小數學教材於等值分數補救教學之行動研現，82 版數學教材雖有助於學童理解等值分數概念的優點，但在教學當中，教師對教材的理解與靈活運用，是同等的重要。教師在教學前，若能仔細研讀與理解教材，並在教學中實踐，不斷琢磨歷練，在教學中因應學童的個別差異，調整修正教學方式，因材施教，則可將 82 版教材發揮最理想的教學效能。

三、82 版「等值分數」教材的教學活動編排較有助於學習學習等值分數概念。

82「等值分數」教材由離散量切入進行等值分數比大小活動，對學童概念學習與釐清是較具體易懂的。例如：根據題目所列分數詞的意義，從基準量中找出單位分數內容物，再依序累加找出分數數詞指定的量。

由離散量切入，能藉由具體操作，透過內容物多寡的比較，去體驗等值分數的義涵，對學童而言是相對容易理解的，在本研究中所記錄研究對象的學習回饋中，亦提及透過畫圖的具體操作能讓他們更容易從自己的舊經驗去延伸解題，建

構等值分數概念，尤其是一開始接觸該單元概念時。

82 等值分數學習活動是透過具體實作引導學童認識等值，再定義等值分數；亦即先理解再定義，根據本研究發現，82 年版的學習過程會比一般版本的教學活動編排順序—先定義再理解，82 版等值分數的教學活動編排較有助學童順利學習等值分數概念。



第二節 研究建議

壹、對話在教學時扮演重要角色

同一個題目，答錯選項相同，學童在此概念的迷思也不盡相同，背後都有著因學習背景不同而形成的差異。在分析錯題時，不能只用「答對」與「答錯」，或依據答題中的四種選項將學童的答題表現，分類成兩類型或四類型。用同一種假設去理解不同學童的思維，是不夠嚴謹的，因為無法正確找出每一個學童的學習問題，更遑論能真正做到概念的釐清或協助其提高學習成效。因此，在補救教學前與補救教學當中，應運用對話去理解學童的學習背景，分析其產生學習困難的可能原因，方能更有效提升其學習成效。

貳、多元表徵轉換幫助形成完整概念

各種形式的表徵在概念的 formed 過程中是環環相扣的，若學童只能將布題情境轉換成符號，而無法清楚說出想法，或在某種表徵間的轉換產生困難，則有可能是其概念迷思之處。因此各種形式表徵的轉換，能確認學童該部分的概念學習是清楚、完整的，而非似懂非懂。

參、有效提問在教學中適時修正與不斷提升

有效的提問可以提升教學成效，問對問題方能引導學生往對的方向思考，逐步釐清概念。更進一步說，有效提問是適合個別學生學習特質的提問。在教學中，不同情境、不同學習者、不同的學習背景，提問的方式也有所不同。教學不能標準化，提問亦是。

肆、未來研究方向建議

如同當年在實施 82 年版教材時一樣，也許很多人會納悶，這些能夠運用建構數學教學，在課堂上成功實踐教學成效，教會學生數學概念的老師們，是如何理解 82 年版數學教材的？運用時遭遇什麼樣的困難？在課堂中教師是如何靈活運用與解決這些困境的？這些問題，都可以提供給一些想要嘗試建構數學教學的

老師，十分具體的參考。由於本研究係運用 82 年版數學教材於等值分數的補救教學研究，僅琢磨於學生在 82 版教材教學後，概念的轉變與釐清，以及其成績表現的具體學習成效如何，較少論及上述問題，因此以上幾個觀點可以作為之後 82 年數學教材的研究主題與方向。



參考文獻

壹、中文部分

- 王三幸(1992)。影響國小高年級學生數學學業成就的相關因素研究。國立臺灣師範大學，台北市。
- 王秀璉(2003)。實作評量在國小數學科之應用-以五年級學童分數為例。國立台中師範學院教育測驗統計研究所碩士論文。
- 王淵智(2005)。多元表徵課程對國小四年級學童分數學習成效之實驗研究。國立高雄師範大學教育學系，博士論文。
- 毛炳楠(2005)。國民小學數學教師教學鷹架策略分析之個案研究。台中師範學院國民教育學系碩士論文。
- 杜正治(1993)。補救教學之實施。臺北：心理出版社。
- 林建平(1997)。學習輔導：理論與實務。台北：五南。
- 林碧珍(1990)。以矩形和正方形發展學生的分數概念。國教世紀，第二十五卷，第四期。國立新竹師範學院。
- 林碧珍(2000)。數學教學模式的闡釋-教師佈題、學生解題、發表解題、溝通討論。國教世紀，第 189 期，pp.23-35. 國立新竹師範學院。
- 林文生、鄔瑞香(民 88)。另類教與學：數學教育的藝術與實務。台北市：心理。
- 林福來、黃敏晃、呂玉琴(1996)。分數啟蒙的學習與教學之發展性研究。科學教育學刊，4(2)，161-196。
- 吳清基(1995)。精緻教育的理念。台北：師大書苑。
- 吳碧真(2012)。運用圖像表徵與鷹架策略教學進行四年級分數加減補救教學之研究。
- 李咏吟(1998)。認知教學理論與策略。台北市：心理出版社。
- 李彥典(2008)。探究國小四年級學童分數概念的知識結構圖。國立臺中教育大學數學教育學系在職進修教學碩士論文。

- 李曉莉(1997)。國小二年級兒童分數概念之研究。國立臺中師範學院國民教育研究所，臺中市。
- 李振嘉(2017)。具象化教材應用於國小五年級分數與小數補救教學之行動研究。國立屏東大學科普傳播學系碩士論文。
- 胡夢鯨、張世平(1988)。行動研究。教育研究法的探討與應用。臺北：師大書院。
- 洪素敏、楊德清、蔡鳳秋(2007)。等值分數補救教學之研究。課程與教學季刊，10(3)，125-160。
- 唐淑華(2010)。從希望感模式論學業挫折之調適與因應—正向心理學提供的「第三種選擇」。台北：心理。
- 秦麗花(民 90)。教師行動快易通。臺南市：翰林。
- 陳麗玲(1993)。國小數學學障學生計算錯誤類型分析之研究。國立彰化師範大學，彰化。
- 陳姿吟(2007)。整合行動載具之線上形成性評量對國小同分母分數減法單元之成效。國立臺灣師範大學資訊教育學系碩士論文。
- 陳義勳(民 89)。探討使用建構主義教學成效上之研究。台北市立師範學院學報，(31)，347-355。
- 陳明宏、呂玉琴(2005)。國小四年級學童分數概念之診斷教學研究。國立臺北教育大學學報，18(2)，1-32。
- 陳彥廷、柳賢(2005)。運用鷹架理論初探國小學生數學學習—以一位五年級學童為例。南大學報，39(1)，26-43。
- 陳佳琳(2010)。82 年和 9 年版國小中年級數學分數教材文字題解題鷹架之比較分析。台中教育大學。
- 陳惠邦(1998)。教育行動研究。台北市:師大書苑。
- 郭重吉(民 81)。從建構主義的觀點探討中小學數理教學的改進。科學發展，2(5)548-570。

- 國家教育研究院籌備處(2009)。國家教育研究院籌備處 2009 年研究年報。臺北市：作者。
- 張春興(2007)。張氏心理學辭典。台北市：東華。
- 張春興(2013)。教育心理學—三化取向的理論與實踐。台北：東華書局。
- 張新仁(2001)。實施補救教學之課程與教學設計。教育學刊，17，85-106。
- 張新仁(1995)。教學原理與策略。載於王家通主編，教育導論。台北：五南。
- 張世忠(民 90)。建構教學-理論與應用。台北：五南。
- 張靜譽(民 85a)。傳統教學有何不妥？建構與教學，4，1-4。
- 張靜譽(民 85b)。建構教學：採用建構主義，如何教學？建構與教學，7，1-4。
- 張新仁、邱上真、李素慧(2000)。國中英語科學習困難學生之補救教學成效研究。教育學刊，16，163-191。
- 張熙明(2004)。國小五年級學童分數表徵教學之研究，國立嘉義大學國民教育研究所，嘉義。
- 曹萬春(2005)。應用鷹架理論輔助國小分數迷思概念課程效益之探究。臺中師範學院數學教育學系，臺中市。
- 教育部(2008)。國民中小學九年一貫課程綱要。臺北：教育部。
- 教育部(1993)。國民小學課程標準。臺北：教育部。
- 教育部(2014)。國民小學及國民中學補救教學實施方案。台北：教育部。
- 甯自強(1991)。藉由解題的活動瞭解兒童及促進兒童增加對數學的瞭解，教師之友，5(32)，47-51。
- 甯自強(1993a)。分數的啟蒙～量的子分割活動的引入～。教師之友，34(3)，45-51。
- 甯自強(1995)。單位量的變換(2)--正整數乘除運思的融合，教師之友，036(005)，0035-0044。
- 游政雄、呂玉琴(2002)。臺灣北部地區國小中年級學童分數概念之研究。國立臺北師範學院學報，15，37-68。

- 彭海燕(1998)。國小學童等值分數概念了解之研究。國立台北師範學院國民教育研究所碩士論文。
- 湯錦雲(2002)。國小五年級學童分數概念與運算錯誤類型之研究。國立屏東師範學院數理教育研究所碩士論文，屏東。
- 黃靖瑩(2003)。國小中年級學童分數概念之研究。未出版之碩士論文，國立臺北師範學院數理教育研究所，臺北市。
- 黃富順、李咏吟(2000)。個別化教學。教育大辭書。2000年12月，取自國家教育研究院 Individualized Instruction 雙語詞彙、學術名詞暨詞書資訊網網頁：
<http://terms.naer.edu.tw/detail/1308045/>
- 詹婉華、呂玉琴(2004)。國小高年級學童分數概念量表之設計研究。科學教育學刊，12(2)，241-263。
- 詹婉華(2003)。國小高年級學童分數概念之研究。未出版之碩士論文，國立臺北師範學院數理教育研究所，臺北市。
- 詹永名、王淑俐(2018)。補救教學:關懷弱勢者教育。台北市:五南。
- 葉乃丰(2007)。探討教學前、後分數概念的知識結構—以三年級為例。國立臺中教育大學教育測驗統計研究所教學碩士論文。
- 蔣治邦(1994)。由表徵觀點探討新教材數與計算活動的設計，國民小學數學科新課程概說—低年級。
- 蔣治邦(1997)。由表徵的觀點看格式的選擇，國民小學數學科新課程概說(中年級)，49-65，板橋：教師研習會。
- 蔡清田(2000)。教育行動研究。台北：五南。
- 蔡職鴻、劉曼麗(2012)。對國小三年級數學低成就學童在分數迷思概念之探討。科學教育月刊，353，18-31。
- 潘淑滿(2003)。質性研究—理論與運用。台北：心理出版社。
- 賴麗珍(2011)。國小六年級學童分數概念試題結構分析之研究。國立臺中教育大學數學教育學系國小教師在職進修教學碩士班碩士論文。

顏淑如(2008)。探究國小四年級學童在等值分數的知識結構。國立臺中教育大學
數學教育學系，臺中市。

魏麗枝、游自達(2007)。國小三年級學童分數詞意義之研究。未出版之碩士論文，
國立臺中教育大學教育學系，臺中市。

羅鴻翔(譯)(1980)。分數的數之發展。國教之友，454-455，36-41。

羅爾斯(著)、李少軍等人(譯)(2003)。正義論。台北：桂冠圖書。

羅爾斯(John Rawls)，《正義論》，李少軍、杜麗燕、張虹 譯，新北市：桂冠，2003。



貳、 英文部份

- Bergeron, M. J., & Herscovics, H. (1987). Unit Fractions of a continuous whole. Paper presented at the 11th International Conference for the Psychology of Mathematics Education.
- Behr, M. J., Lesh, R., Post, T. R. & Silver, E. A. (1983). Rational number concepts. In Lesh, R. & Landan M. (Eds.). Acquisition of mathematics concepts, research processes. New York : Academic Press.
- Behr, M. J., & Post, T. R. (1988). Teaching rational number and decimal concepts. In T. R. Post (Eds.), Teaching mathematics in grades K-8, 190-229. Boston, MA: Allyn and Bacon.
- Bruner, J. S. (1966). Toward a Theory of Instruction. Cambridge: Harvard University Press.
- Corwin, R. B., Russell, S. J., & Tierney, C. C. (1990). Seeing Fractions: A unit for the upper elementary grades. Developed by TERC (Technical Education Research Centers, Inc.) for the California Department of Education.
- Fleischner, J. E. & Marzola. E. S. (1988), Arithmetic, In K. A. Kavale. S. R. Forness. & M. B. Bender (Eds.), Handbook of learning disabilities (Vol. II): Methods and interventions (pp.89-110). Boston. MA: College-Hill Publication.
- Greenfield, P. (1984). A theory of the teacher in the learning activities of everyday life. In B. Rogoff and J. Lave (Eds.), Everyday cognition (pp. 117-138). Cambridge, MA: Harvard University Press.
- Johnson, D. W., & Johnson, R. T. (1994). Learning together and alone: Cooperative, competitive, and individualistic learning (4th ed.). Boston, MA: Allyn & Bacon.

- Kieren, T. E. (1976). Rational number on the number line. Mathematics for the Elementary School. Grade 5:Teacher's Commentary, part II, Yale University.
- Lesh, R., Post, T. & Behr M. (1987). Representations and translations among representations in mathematics learning and problem solving. Problems of representation in the teaching and learning of mathematics (pp 33-40). Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum
- Larson, C. N. (1980) .Locating Proper Fractions on Number Lines : Effect of Length and Equivalence. School Science and Mathematics, 423-428.
- McLaughlin T. F., & Vacha, E. F. (1992). The at-risk student: A proposal for action. Journal of instructional psychology, 19, 66-68.
- Painter, R. R. (1989). A comparison of the procedural error patterns, scores, and other variables, of selected groups of university and eight-grade students in mississippi on a test involving arithmetic operations on fractions. Doctoral dissertation, University of Southern Mississippi.
- Piaget, J., Inhelder, B. & Szeminska(1960). The Child's Conception of Geometry (pp.32-335). New York: Basic Book.
- Rodriguez-Hanley, A., & Snyder, C. R. (2000). The demise of hope: On losing positive thinking. In C. R. Snyder (Ed.), Handbook of hope: Theory, measures, and applications (p. 39-54). Academic Press.
- Roehler, L. R. & Cantlon, D. J. (1996). Scaffolding: A powerful tool in social constructivist classrooms. 2004 年 6 月 20 日 取自 : <http://ed-web3.educ.msu.edu/literacy/papers/paperlr2.htm>
- Rogoff, B. (1990). Apprenticeship in thinking: Cognitive development in social context. New York: Oxford University Press.
- Slavin, R. E. (1994). A practical guide to cooperative learning. Boston, MA: Allyn &

Bacon.

Stuyf, R. V. D. (2002). Scaffolding as a teaching strategy. 2003 年 7 月 20 日取

自 : <http://condor.admin.cuny.cuny.edu/~group4/Van Der Stuyf/Van Der Stuyf>

Paper.doc

Van de Walle, J. A. (2001). Elementary and middle school mathematics : teaching developmentally(4th ed.) . Boston, MA : Allyn & Bacon.

Watanabe, T. (2002). Representations in teaching and learning fractions. *Teaching children mathematics*, 8(8), 457-463.

Wood, D., Bruner, J. E. & Ross, G. (1976). The Role of Tutoring in Problem Solving. *Journal of Child Psychology and Psychiatry*, 17(2), 89-100.

