法定基本薪資對最適銷售佣金制及其相關因素的影響

陳淼勝

管理科學研究所專任教授

張春桃

統計學系專任講師

摘要

在民主化或開發程度較高的國家，基於對人民基本生存權的考量或由於同業工會為保障其會員之基本生活，常常透過法律或聯合壟斷的方式，強制要求雇主支付給一員工的薪資，至少要達到某一水準。假設銷售某貨品的企業欲訂定一個按件計酬的佣金制，以兼顧各種不同銷售能力之銷售人員的需求；則上述法定基本薪資對佣金制訂定有什麼影響是本文要研究的主要問題。

我們將此問題製作成可以具體討論的數學模式，並應用最適控制理論求此模式之最佳佣金制。進而探討法定基本薪資及銷售人員素質的差異性等外生變數，對失業率、銷售人員所得及企業利潤的敏感度分析。

關鍵詞：最適控制理論，最適佣金制度，異質銷售力，常態分配

一、引言

對銷售某一貨品的企業而言，銷售活動為企業獲取利潤的主要方式，而銷貨活動又需透過銷售人員的執行才能達成。這使得除貨品的品質因較具實務性無法作一般性的討論外，其餘因素如銷售人力資源的多寡、銷售人員的銷售行為與銷售意願便成為探討行銷利潤的最重要因素，也是研究如何善用銷售人力的主要內容。一般而言，應用銷售人力所能

產生的效果與企業在進行銷售活動時所面臨的環境狀況，以及企業在促使銷售活動運作所採用的報酬策略皆有密切的關係。為了使本文所欲研究主題的討論嚴謹且具體，我們將把企業銷售活動所面臨的環境狀況限制在下列二方面：(一)法定基本薪資(二)可用的銷售人力資源分佈，考慮之。

在法定基本薪資狀況方面：現今民主自由的國家，由於民意高漲，人民更加重視自身的權利，為保障自己之基本生存權，往往會督促政府訂定最低基本薪資的法令條文。而產業工會為維護自己會員的權益，常常透過聯合壟斷的手段迫使業者接受最低薪資的要求。因此法定基本薪資漸漸成為銷售決策者不可忽略的一項環境因素。在可用的銷售人力資源分佈方面：雖然就長期而言，企業可藉由招募、培訓等方式有計劃的改變或控制銷售人力資源的多寡及素質；然就短期而言，可用的銷售人力資源及銷售人力素質卻是不易更動的。由於本文是探討最適佣金制的制定問題，而佣金制又可配合現有的銷售人力資源狀況適時修正。因此在下面的討論中，我們將把可用的銷售人力資源及人力資源分佈狀況皆看成事先給定的來考慮。

為了能更清楚的表達在短期內，銷售人力素質分佈對最適佣金制的影響效果，我們將採用”銷售潛力”這個名詞來詮釋下列所代表的意義。對某位銷售人員而言，其銷售潛力就是他花費其所有銷售資源（包含其所有時間、經驗、技巧和人際關係等）在單位時間內所能推銷出的最大銷貨量。假如某位銷售員的銷售潛力為n，則雖然他有能力在單位時間內銷售出n件貨品，但在單位時間內銷售出n件貨品，可能不是他個人的最佳選擇。概因他必須花費所有的時間及精力才能實現他的銷售潛力，而這種全額付出必然會造成他的心理壓力及精神損失。因此在衡量得失後，這位銷售員可能會分出一部份的銷售資源用於推銷其他品牌的貨品，或將一部份的時間與精力花在非銷售性的活動方面如：休閒或娛樂等。因此，若我們用符號q表示一銷售潛力為n之銷售員的實際銷售量，則q與n之間的關係為$q \leq n$。

如果可將銷售人員依其銷售能力不同分類，並可針對不同類別的人員分別擬制不同的佣金制；則理論上，這種因人而異的銷售報酬制度對企業而言可達到最大的激勵效果。唯在實務上，一來是因為員工愈來愈在乎獎賞公平性問題，二來是因為現今資訊愈來愈發達而使得獎賞制度愈來愈無法密而不宣；而迫使企業不得不祇能擬定出一種佣金制，並將此佣金制適用於各種銷售能力不同之銷售人員。一般而言，銷售人員的銷售能力與其所從事銷售貨品的功能有關。所謂貨品的功能，就是能使貨品持有者或貨品使用者增進效用的屬性。我們可將貨品的功能概括的分成”功能外顯者”與”功能內含者”二類。若貨品是屬於功能外顯者，則由於社會大眾憑自己知識或經驗皆可很輕易的了解貨品的屬性。這種情況會使得銷售人員對貨品之屬性說明與行銷技巧所能發揮的效果皆受到限制。換句話說，

功能外顯的這種屬性往往也是造成銷售人員之銷售能力皆大同小異的原因。這種因貨品功能外顯而假設所有銷售人員皆為同質之相關論題的討論，已有了許多具體的研究成果如：Wein berg (1975)，Srinivasan (1981)，Basu, Lal, Srinivasan and Staelin (1985)，Lal (1986)和Coughlan and Sen (1989)。若貨品是屬於功能內含者，則在進行銷售活動時，銷售人員之行銷經驗、行銷技巧比較能發揮。此時，不同銷售員在單位時間內所能銷售出去的貨量可能就會有很大的差別。易言之，在功能內含貨品之銷售上，銷售人員之銷售能力分佈的變異數是不可忽略的因素。即應在銷售人員異質的假設條件下，探討相關問題。就如Lal and Staelin (1986)和Rao (1990)等學者在研究報酬制度時所採用的假設條件一樣。

關於報酬制度的型態方面：在考慮不受法定基本薪資影響的前提下，一般可將其分為下列三種類型，(一)直接薪資制(straight salary)，(二)直接佣金制(straight commissions)，(三)基本薪資加上佣金制(a combination of base salary and commissions)。實務上，採用直接薪資制的行銷貨品大部份屬於貨品本身功能明確或大衆對此貨品的性質已非常清楚，不太需要藉助銷售人員之專業知識來促銷者。對這種功能外顯的貨品，由於雇用較多的銷售人員所產生的銷售成果優於激勵現有銷售人員所能增加的銷售量；故採用直接薪資制並多聘銷售人員的這種策略，對銷售量的提升較有助益。另方面，採用直接佣金制的商品，大部份屬於貨品功能必須透過銷售人員的介紹、說明才能達到銷售目的者。由於此類銷售人員的培訓與養成不是一蹴即成的，故對功能內含性較高的貨品，在短期內，採用激發現有銷售人員促銷能力的策略優於采用雇用較多銷售人員的策略。因此我們可以說對功能內含性較高的貨品而言，按件計酬的直接佣金制是激勵現有銷售人員提高績效較有效的方法。此方面較具代表性的研究有Farley (1964)，Weinberg (1975)和Srinivasan (1981)等。又採用基本薪資加上佣金制者，其銷售人員的工作內容往往除了銷售貨品的工作外，還有其他慣常性的工作要執行；因而有一基本薪資給予回饋。此方面的研究有Stae lin (1985)及Rao (1990)等。

從上述的討論我們得知，法定基本薪資的訂定對不同屬性的貨品及不同佣金制類別會有不同的影響。對直接薪資制或基本薪資加上佣金制而言，因銷售人員的待遇已經被保証至少在某一水準以上，故法定基本薪資的訂定與否對它們的影響相當有限。然而對直接佣金制而言，由於它缺乏最低薪資的保障，深受法定基本薪資這規定的衝擊。因此本文將把研究重點放在法定基本薪資對直接佣金制的影響效果這一方面考慮。以下我們所討論的問題都是指可用之銷售人力資源及法定基本薪資皆給定以後的事情。而所謂的佣金制也是指在上述情況下的直接佣金制，即保障最低收入下之直接佣金制。採用此佣金制的企業，必須先決定一個開始按件計酬的最低銷售量y。若一銷售人員的實際銷售量q未超過y時，則企業祇支付法定基本薪資ω此銷售員作為報酬；而當一銷售人員的實際銷售量q超過基

本銷售給量y時，則企業支付給此銷售員的報酬，除了法定基本薪資ω外，再加上按件計酬的佣金R(q)。即如果一銷售員的實際銷售量爲q，則當q>y時，此銷售員所得之報酬爲$R(q)+\omega$；而當$q \le y$時，則此銷售員所得之報酬爲ω。雖然銷售員的實際銷售量q未達y時，仍可得到ω，但由於有聘用期限，故對此類銷售員在聘約期滿時，企業可採行不再續聘的政策，因此不會持續發生一銷售員之銷售量皆達不到最低銷售量的情況。縱使我們可以用一銷售員過去的最佳表現來估計一銷售員的銷售潛力；但基本上，銷售潛力祇是影響銷售表現的某一項”因”而不是”果”。由於銷售潛力不易估計準確，而我們又不可能將所有銷售表現的因與實際銷售表現這項果綜合考慮後，才決定如何激勵一銷售員是最有效的。因此，我們在制訂按件計酬函數R時，祇好以一銷售員的實際銷售量q作爲度量其報酬的基準。即R爲q之增函數，記作：R=R(q)，其中R(y)=o。另外，爲了便於闡述本文的主要內容，我們把一銷售員之實際銷售量q，與其銷售潛力n的比值：(q/n)，稱爲該銷售員的”促銷資源耗用率”。此比值可顯示一銷售人員耗用其個人資源量的多寡，同時用它來度量一銷售人員的努力程度亦很合適。因此我們將一銷售員因銷售貨品所付出的代價用下列函數：C=C(q/n)表示之。這是本文在討論如何制定佣金制這個問題的製作上及數學處理上，有別於前人研究的主要不同點之一。另外，雖然也有許多學者(Srinivasan (1981)，Staelin (1985)，Basu, Lal, Srinivasan and Staelin (1985)，Lal (1986)，Coughlan and Sen (1989)，Rao (1990) etc.)研究佣金報酬制度；但他們皆未將法定基本薪資和銷售人力資源分佈這兩種因素一起納入模式來考慮。這是我們在研究主題方面，有別於前人研究的另一特徵。本文就是針對法定基本薪資及最適佣金制這兩個主題建立可以具體討論的數學模式，並應用最適控制理論求此模式之最佳佣金制。進而探討法定基本薪資及銷售人員素質的差異性等外生變數，對失業率、銷售人員所得及企業利潤的敏感度分析。

二、假設與符號

我們對數學模式中將採用之符號說明如下：

n= 一銷售人員之銷售潛力，n的可能範圍爲0與n_1之間，即$0 \le n \le n_1$，其中n_1爲所有可用銷售人員中，銷售潛力最高者的銷售潛力值。

$q^{(n)}$= 潛力爲n之銷售人員的實際銷售量，其中$0 \le q^{(n)} \le n$。

ω = 法定基本薪資，$\omega>0$。

法定基本薪資爲公司給付任一銷售人員的最低報酬，我們假設公司採取的是由法律或某一產業工會所訂之最低薪資，故此ω對企業而言是一參數而非決策變數。

y= 基本銷售量，所謂基本銷售量就是超過法定基本薪資待遇，開始按件計酬的最低銷售量。

對企業而言，y是一項決策變數。由於企業一旦決定聘用一銷售人員，至少須支付法定基本薪資ω給該銷售人員；故企業在自身利益的考量下，會因法定基本薪資的訂定而提高起聘人員之銷售能力。即企業爲了適應法定基本薪資的要求，會決定辭聘某些銷售能力較差的人員；而決策變數y正是這項決策後的產物。

$R(q)$=當實際銷售量q超過基本銷售量y時之按件計酬的佣金所得；其中$R(y)=0$。

$Q^{(n)}=q^{(n)}/n$=銷售潛力爲n之銷售員的促銷資原源耗用率，表示銷售員使用其促銷資源量的多寡。

本文假設一銷售員的付出$Q^{(n)}$與其所得$R(q)+\omega$之間具有替代性，並遍過下列的函數C將兩者的度量單位化爲一致。

$C(Q^{(n)})$=銷售潛力爲n之銷售員在銷售q個單位所需付出的代價；其爲一銷售員（個人）促銷資源耗用率$Q^{(n)}$的函數。

由於，當銷售員銷售數量愈高時，促銷資源耗用率也愈大，所付出之代價也隨之提高，故C爲$q^{(n)}/n$的遞增函數，即$C'>0$且$C(0)=0$。又因個人促銷資源量是有限的，所以C的邊際函數也爲$q^{(n)}/n$的遞增函數，表示$C''>0$。

$q_n(R)$=在法定基本薪資ω及公司佣金制R均給定的情況下，銷售潛力爲n之銷售人員的最適銷售量。

p=出售單位貨品之企業所能得到的利潤；此處的利潤不包括支付給銷售人員的報酬。

m_n=銷售潛力爲n之銷售人員的人數，$0\leq n\leq n_1$。

M= m_n銷售人力資源的總人數。

$f_n=m_n/M$=銷售潛力爲n之人員比例，$0\leq n\leq n_1$。

爲便於變數間關係的研究與分析，本文假設銷售潛力n的分配是具有平均數爲μ，標準差爲σ的常態分配： $f_n=(1/\sqrt{2\pi}\sigma)\exp\{-(n-\mu)^2/2\sigma^2\},\quad \mu>0,\quad \sigma>0$

三、數學模式

企業在決定其報酬制度時，除了必須接受法定基本薪資的規定外，更要考慮銷售人員對銷售佣金制度的反應。因此，在構建整個問題的數學模式之前，我們先得就銷售人員對佣金制的調適行爲作一分析。

㈠銷售人員的反應

對某一銷售潛力爲n之銷售人員而言，由於他沒有權決定而祇能接受企業所訂的報酬制度R ，因此在他知道有法令條文規定或產業工會議定之法定基本薪資ω這件事後，他

祇能決定個人的實際銷售量$q^{(n)}$，以期自己的淨收益$R+\omega-C$最大。我們把此問題的模式表示如下：

$$\max_{0\le q^{(n)}\le n} R(q^{(n)})+\omega-C(q^{(n)}/n) \qquad (\text{給定}R,\omega,n) \tag{3.1}$$

如果我們將ω,n固定，並用符號$q_n=q_n(R)$表示(3.1)的最佳解，則由(3.1)式得最佳解的必要條件爲

$$\frac{dR(q_n)}{dq}=C'(\frac{q_n}{n})\frac{1}{n}$$

即

$$\frac{dR_n}{dn}=C'(\frac{q_n}{n})\frac{1}{n}\frac{dq_n}{dn} \tag{3.2}$$

式中R_n表示$R(q_n)$。

㈡公司的報酬制度

利用(3.2)式，企業在既定法定基本薪資ω和可用銷售人力資源分佈給定的情形下，最適報酬制度問題的數學模式可寫成下列形式：

$$(1)\quad\begin{cases} \max\limits_{R,y}\ \displaystyle\int_{n_0(y)}^{n_1}[pq_n-R(q_n)-\omega]\,m_n dn & (3.3)\\ S.t.\quad \dfrac{dR(q_n)}{dn}=C'(q_n/n)\dfrac{1}{n}\dfrac{dq_n}{dn} & (3.4)\\ \qquad q_n'\ge 0\text{且在區間}[n_0,n_1]\text{中能使}q_n'=0\text{的點的個數是可數的} & (3.5)\\ \qquad R(y)=0 & (3.6)\\ \qquad q_{n0}=y & (3.7)\end{cases}$$

其中$n_o(y)$表示可以達到基本銷售量之銷售員的最低銷售潛力，而(3.4)這個限制式是用來表示銷售人員對公司所訂之佣金制R的反應行爲。

令$u_n=q'_n$且利用$m_n=M.f_n$的關係式，則模式(1)可改寫成

$$
(2)\quad
\begin{cases}
\max\limits_{R,y} \quad M\int_{n_0(y)}^{n_1}\left[pq_n - R(q_n) - \omega\right] f_n dn & (3.8)\\
S.t.\quad R'_n = C'(q_n/n)\dfrac{1}{n}q'_n & (3.9)\\
\qquad q'_n = u_n & (3.10)\\
\qquad q'_n \geq 0\text{且在區間}[n_0, n_1]\text{中能使}q'_n = 0\text{的點的個數是可數的} & (3.11)\\
\qquad R(y) = 0 & (3.12)\\
\qquad q_{n0} = y & (3.13)
\end{cases}
$$

四、最適的報酬制度

我們可把R_n和q_n看成最適控制理論中的狀態變數，而把un看成控制變數。令R* 爲模式(2) 之最佳解，並令$q^*_n=q_n(R^*)$，則我們可利用最適控制理論之最佳解必要條件求解R* ,n_o^*,y* 及q^*_n。由於有了(3.11)這個限制式而使得模式(2)不是最適控制理論的標準型，因而我們不能直接利用標準型的條件去求最佳解。若$D=\{n \mid n_0 \leq n \leq n_1 \text{且} q'^*_n=0\}=\{d_1,d_2\ldots\ldots\}$，則可將模式(2)切割成下列數個子題分別求其最佳解。

$$
(3)\quad
\begin{cases}
\max\limits_{R} \quad M\int_{d_i}^{d_{i+1}}\left[pq_n - R_n - \omega\right] f_n dn & (4.1)\\
S.t.\quad R'_n = C'(q_n/n)\dfrac{1}{n}u_n & (4.2)\\
\qquad q'_n = u_n & (4.3)
\end{cases}
$$

由於上述每個子題皆是最適控制的標準型，根據最適控制理論及利用一些邏輯推演和數學運算可以証明：模式(2)的R^*_n,n_o^*,y* 和q^*_n的必要條件爲：

$\lambda'_n=f_n$ (multiplier equation) (4.4)

$\delta'_n=-[pf_n+\lambda_n C''(q_n/n)(u_n/n^2)]$ (multiplier equation) (4.5)

$\lambda_n C'(q_n/n)(1/n)+\delta_n=0$ (optimality condition) (4.6)

$\lambda_{n1}=0$ (transversality condition) (4.7)

$\delta_{n1}=0$ (transversality condition) (4.8)

$[pq_{no}-R(q_{no})-\omega\}f_{no}(dn_o(y)/dy)=o$ (4.9)

其中λ與δ爲輔助變數(adjoint variables)。

由(4.4)和(4.7)兩式可得

$$\lambda_n = -\int_n^{n1} f_s ds \tag{4.10}$$

利用(4.10),(4.5)和(4.6)三式，我們可解出

$[p-C''(q_n/n)(1/n)]f_n=(1-F_n)[(q_n/n)C''(q_n/n)+C'(q_n/n)](1/n^2),\ \forall n \in [n_o,n_1]$ (4.11)

其中 $F_n = \int_0^n f_s ds$ and $F_{n1} = \int_0^{n1} f_s ds = 1$。

至於最適銷售量 q^*_n 則可由(4.11)式決定之。

將(3.12)與(3.13)兩式代入(4.9)式，可求出最適的基本銷售量

$$y^* = \frac{\omega}{p} \tag{4.12}$$

並由(3.13),(4.11)和(4.12)三式解出 $n^*_o=n_o(\frac{\omega}{p})$。利用求出的 q^*_n,y^*,n^*_o 代入(3.9),(3.10)及(3.13)這三個關係式，我們可定出最適佣金報酬 R^*_n。

此外，由Legendre的必要條件(Kamien, M. I. and Schwarty, N. L. 1981,pp.117)，我們可得最佳解的另一個必要條件：

$f_nC''(q^*_n/n)n+(1-F_n)C'''(q^*_n/n)(q^*_n/n)+2(1-F_n)C''(q^*_n/n)>o,\ \forall n \in [n_o,n_1]$ (4.13)

若令衰敗函數(hazard function) $h_n=f_n/(1-F_n)$ 則(4.13)式可改寫成

$C''(q_n/n)(h_nn+2)+C'''(q_n/n)(q_n/n)>0,\ \forall n \in [n_o,n_1]$ (4.14)

五、法定基本薪資變動後的影響

性質一：企業銷售利潤 J^* 與法定基本薪資 ω 有下列關係：$\partial J^*/\partial\omega<0$，且 $\partial^2J^*/\partial\omega^2>0$。

證明：

因總利潤 J^* 為 $$J^* = M\int_{n_0(\omega/p)}^{n_1} [pq_n{}^* - R(q_n{}^*) - \omega]\, f_n\, dn$$

故 $$\frac{\partial J^*}{\partial\omega} = M\left[-[pq_{n0}{}^* - R(q_{n0}{}^*) - \omega] f_{n0} \frac{\partial n_0(\omega/p)}{\partial\omega}\right] + M\int_{n_0(\omega/p)}^{n_1} -f_n\, dn; \quad \text{利用(4.9)}$$
$$< 0$$

另外考慮上式 $\frac{\partial J^*}{\partial\omega}$ 對 ω 的微分得知

$$\frac{\partial^2 J^*}{\partial\omega^2} = M f_{n0} \frac{\partial n_0(\omega/p)}{\partial\omega}; \quad \text{利用(3.11),(3.13)及(4.12)式} \tag{5.1}$$
$$> 0$$

在公司自身利益的考量前提下，一銷售人員被公司所預期之銷售量至少須達到 y^*，才能為公司所聘用。因此銷售潛力至少達到 $n_o(\omega/p)$ 的人員才可能進入該公司銷售人力系

統。至於銷售量未能達到y*的這些人員，就會因法定基本薪資的訂定而造成失業，這些人員的失業可以說是非自願性的。如果我們用符號no表示在沒有法定基本薪資的情況下，願意進入公司銷售系統的最低銷售潛力，則n_o滿足$q_{no}=0$，且$n_o<n_o(\omega/p)$。因此我們可以說非自願性失業的人數爲

$$E = M\int_{\bar{n_0}}^{n_0(\omega/p)} f_n\, dn \tag{5.2}$$

性質二：法定基本薪資ω與非自願性失業人口E之間有下列關係：

$$\frac{\partial E}{\partial \omega} = M\psi(\frac{n_0(\omega/p)-\mu}{\sigma})\frac{\partial n_0(\omega/p)}{\partial \omega}\frac{1}{\sigma} > 0 \tag{5.3}$$

其中$\phi(.)$爲標準常態機率分配。

證明：利用(5.2)及常態分配性質可得

$$E = M\int_{\bar{n_0}}^{n_0(\omega/p)} f_n\, dn = M\Phi(\frac{n_0(\omega/p)-\mu}{\sigma}) - M\Phi(\frac{\bar{n_0}-\mu}{\sigma})$$

其中$\Phi(.)$爲標準常態的分配函數。

考慮E法ω的偏導數及利用(3.11),(3.13)及(4.12)式即可得證。

性質三：法定基本薪資ω對佣金所得R(q*)影響：$\partial R^*/\partial\omega<0$，且$\partial^2 R^*/\partial\omega^2<0$。

證明：利用(3.9)式得知

$$R(q_n{}^*) = \int_{n_0(\omega/p)}^{n} C'(\frac{q^*}{s})\frac{1}{s}q_s'^*\, ds = \int_{\omega/p}^{q} C'(\frac{q}{n_q})\frac{1}{n_q}\, dq \tag{5.4}$$

考慮上式對ω的偏導數，

$$\begin{aligned} \frac{\partial R^*}{\partial \omega} &= -C'(\frac{\omega/p}{n_q})\frac{1}{n_q}\frac{1}{p}; \quad \text{利用}C'>0\text{這個假設條件,} \\ &< 0 \\ \frac{\partial^2 R^*}{\partial \omega^2} &= -C''(\frac{\omega/p}{n_q})\frac{1}{n_q{}^2}\frac{1}{p^2}; \quad \text{利用}C">0\text{這個假設條件,} \\ &< 0 \end{aligned} \tag{5.5}$$

六、銷售人力結構變動後的影響

由於企業在尋求其最大利潤的過程中是限於可用之銷售人力資源狀況考慮的，故現存銷售人力資源的素質結構，如平均能力(μ)、能力的差異性(σ)都會對決策者的決定產生影響作用。以下將就銷售能力結構這外生變數對企業本身銷售利潤J*、社會銷售失業人口和銷售人員個人所得的影響效果作進一步的分析。

以下我們把法定基本薪資ω變動對企業銷售利潤J*所產生的影響程度，稱之爲法定

基本薪資的邊際銷售利潤；記作MP即 ∂ J*/ ∂ ω ≡ MP。

性質四：平均銷售潛力 μ 與法定基本薪資的邊際銷售利潤MP的關係爲 ∂ MP/ ∂ μ <0。

證明：因
$$\frac{\partial J^*}{\partial \omega} = MP = M\left[-\int_{n_0(\omega/p)}^{n_1} f_n\, dn\right]$$
$$= M\left[-\int_{\frac{n_0(\omega/p)-\mu}{\sigma}}^{\frac{n_1-\mu}{\sigma}} \psi(z)\, dz\right]$$
$$= M\left[\Phi(\frac{n_0(\omega/p)-\mu}{\sigma}) - \Phi(\frac{n_1-\mu}{\sigma})\right]$$

得
$$\frac{\partial MP}{\partial \mu} = M\psi(\frac{n_0(\omega/p)-\mu}{\sigma})\left[\frac{-1}{\sigma}+\frac{1}{\sigma}\frac{\partial n_0(\omega/p)}{\partial \mu}\right] - M\psi(\frac{n_1-\mu}{\sigma})\frac{-1}{\sigma}$$
$$= \frac{M}{\sigma}\left[\psi(\frac{n_1-\mu}{\sigma}) - \psi(\frac{n_0(\omega/p)-\mu}{\sigma})\right] + \frac{M}{\sigma}\psi(\frac{n_0(\omega/p)-\mu}{\sigma})\frac{\partial n_0(\omega/p)}{\partial \mu} \quad (6.1)$$

由於n_1為銷售潛力的上限者，故$\psi(\frac{n_1-\mu}{\sigma}) < \psi(\frac{n_0(\omega/p)-\mu}{\sigma})$，

且$\frac{\partial n_0(\omega/p)}{\partial \mu} < 0$（見附錄一）；因此，$\frac{\partial MP}{\partial \mu} < 0$。

性質五：平均銷售潛力 μ 對非自願性失業人口E的影響： ∂ E/ ∂ μ <0 0

證明；利用 (5.2) 及常態分配性質可得

$$E = M\int_{\bar{n_0}}^{n_0(\omega/p)} f_n\, dn = M\Phi(\frac{n_0(\omega/p)-\mu}{\sigma}) - M\Phi(\frac{\bar{n_0}-\mu}{\sigma})$$

考慮E的偏導數，

$$\frac{\partial E}{\partial \mu} = M\psi(\frac{n_0(\omega/p)-\mu}{\sigma})\left[\frac{-1}{\sigma}+\frac{1}{\sigma}\frac{\partial n_0(\omega/p)}{\partial \mu}\right] - M\psi(\frac{\bar{n_0}-\mu}{\sigma})\frac{-1}{\sigma}$$
$$= M\frac{1}{\sigma}\left[\psi(\frac{\bar{n_0}-\mu}{\sigma}) - \psi(\frac{n_0(\omega/p)-\mu}{\sigma})\right] + M\frac{1}{\sigma}\psi(\frac{n_0(\omega/p)-\mu}{\sigma})\frac{\partial n_0(\omega/p)}{\partial \mu} \quad (6.2)$$

由於$\bar{n_0} < n_0(\omega/p)$，且$\bar{n_0}, n_0(\omega/p)$均小於$\mu$，故$\psi(\frac{\bar{n_0}-\mu}{\sigma}) < \psi(\frac{n_0(\omega/p)-\mu}{\sigma})$

又$\frac{\partial n_0(\omega/p)}{\partial \mu} < 0$（見附錄一）；因此，$\frac{\partial E}{\partial \mu} < 0$。

性質六：㈠平均銷售潛力 μ 對佣金所得R(q*) 的影響； ∂ R*/ ∂ μ <o。㈡銷售潛力之差異性 σ 對佣金所得R(q*) 的影響：存在一個實數r， μ - σ <r< μ ，使得當n>r時 ∂ R*/ ∂ σ <0而當n<r 時 ∂ R*/ ∂ σ > 0。

證明：利用 (5.4) 式，佣金所得

$$R(q_n{}^*) = \int_{n_0(\omega/p)}^{n} C'(\frac{q^*}{s})\frac{1}{s}\,q_s'^*\,ds = \int_{\omega/p}^{q} C'(\frac{q}{n_q})\,\frac{1}{n_q}\,dq$$

$$(1)\frac{\partial R^*}{\partial \mu} = C'(\frac{q}{n_q})\,\frac{1}{n_q}\,\frac{\partial q}{\partial \mu} + \int_{\frac{\omega}{p}}^{q} C''(\frac{q}{n_q})\,\frac{1}{n_q{}^2}\,\frac{\partial q}{\partial \mu}\,dq \qquad (6.3)$$

根據附錄二，得知$\frac{\partial q}{\partial \mu} < 0$，故$\frac{\partial R^*}{\partial \mu} < 0$得證。

$$(2)\frac{\partial R^*}{\partial \sigma} = C'(\frac{q}{n_q})\,\frac{1}{n_q}\,\frac{\partial q}{\partial \sigma} + \int_{\frac{\omega}{p}}^{q} C''(\frac{q}{n_q})\,\frac{1}{n_q{}^2}\,\frac{\partial q}{\partial \sigma}\,dq \qquad (6.4)$$

由附錄三得知，存在一個實數r，$\mu-\sigma<r<\mu$使得

當$n>r$，$\frac{\partial q}{\partial \sigma}<0$，而當$n<r$，則$\frac{\partial q}{\partial \sigma}>0$。 (6.5)

應用(6.4)及(6.5)的結果即可得證。

性質七：銷售人員銷售能力之差異性σ的變動，亦會影響到某一銷售人員的銷售報酬，當σ增加時祇有某一比例的銷售人員其銷售報酬會增加。利用(6.4),(6.5)及常態分配性質可得此比例的上下限為：

(1)$50\% \leq Pr\{n|\frac{\partial R_n{}^*}{\partial \sigma}<0\} \leq 84.13\%$，

(2)$15.87\% \leq Pr\{n|\frac{\partial R_n{}^*}{\partial \sigma}>0\} \leq 50\%$。

七、結論與建議

本文構建數學模式探討企業在法定基本薪資和可用銷售人力資源分佈皆給定的狀況下，企業為獲取最大利潤須應如何制定出一套按件計酬的佣金制度。利用模式中的最佳解我們可得下列性質：

(一)如果法定基本薪資被要求提高時，企業之銷售利潤就會隨之減少且減少之幅度是隨法定基本薪資的增加而增加的（其變化率可參見(5.1)式）。

(二)如果法定基本薪資被要求提高時，會引發非自願性失業人口的增加，其增加率的變化由銷售人力分配決定之（參見(5.3)式）。

(三)若法定基本薪資向上調整，則銷售人員的佣金所得就會下降，但下降的幅度是隨法定基本薪資的增加而減少的（其變化率可參見(5.5)式）。

(四)如果可用之銷售人員的平均銷售潛力提高，其會促使企業之邊際銷售利潤降低；換言之，因法定基本薪資提高所引發之銷售利潤的減少，此減少的程度會因平均銷售潛力的提升而下降。（參見(6.1)式）。

(五)如果可用之銷售人員的平均銷售潛力提高，則可帶動非自願性失業人口的降低（其降低率可參見(6.2)式）。

(六)如果可用之銷售人員的平均銷售潛力提高，則對某一銷售潛力仍維持不變的銷售人員而言其個人佣金所得將降低（其降低率可參見(6.3)式）。

(七)(i)當可用銷售人員之銷售能力的差異性提高時，從銷售潛力最高算起，前50%至84.13% 的銷售人員，他們的銷售佣金會減少。(ii)從銷售潛力最低之銷售人員算起，前15.87%至50%銷售潛力較低的銷售人員，其銷售佣金將因可用銷售人員之銷售能力的差異性的擴大而增加（參見性質七）。

附錄一

利用(3.13),(4.11),(4.12)三式，我們可知$n_o(\omega/p)$由下式所決定

$$[p - C'(\frac{\omega/p}{n_0})(1/n_0)]f_{n_0} = (1-F_{n_0})[(\frac{\omega/p}{n_0})C''(\frac{\omega/p}{n_0}) + C'(\frac{\omega/p}{n_0})](1/n_0^2)$$

而上式可改寫成

$$[pn_0^2 - C'(\frac{\omega/p}{n_0})n_0]h(n_0,\mu) = [(\frac{\omega/p}{n_0})C''(\frac{\omega/p}{n_0}) + C'(\frac{\omega/p}{n_0})]$$

其中$h(n_o, \mu) = f_{no}/(1-F_{no})$。

令

$$A = [pn_0^2 - C'(\frac{\omega/p}{n_0})n_0]h(n_0,\mu) \text{和} B = [(\frac{\omega/p}{n_0})C''(\frac{\omega/p}{n_0}) + C'(\frac{\omega/p}{n_0})]$$

則

$$A - B = [pn_0{}^2 - C'(\frac{\omega/p}{n_0})n_0]h(n_0,\mu) - (\frac{\omega/p}{n_0})C''(\frac{\omega/p}{n_0}) + C'(\frac{\omega/p}{n_0})$$

將上式對no微分可得

$$[2pn_0 - C'(\frac{\omega/p}{n_0})]h(n_0,\mu) + [pn_0^2 - C'(\frac{\omega/p}{n_0})n_0]h'(n_0,\mu) +$$

$$\frac{1}{n_0^2}[2\frac{\omega}{p}C''(\frac{\omega/p}{n_0}) + \frac{\omega}{p}C''(\frac{\omega/p}{n_0})n_0h(n_0,\mu) + (\frac{\omega}{p})^2C'''(\frac{\omega/p}{n_0})\frac{1}{n_0}] \qquad (a.1)$$

利用(4.11),(4.12)及$h'(no, \mu)>0$（參見Nelson, W. 1982, p.31），得知(a.1)式的值大於"0"，表示A-B爲n_o之遞增函數。

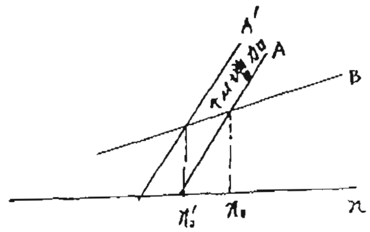
又 $A=[pn_0^2-C'(\frac{\omega/p}{n_0})n_0]h(n_0,\mu)$,給定任一大於零之實數 $\varepsilon>0$,由於

$$
\begin{aligned}
&\frac{\frac{1}{\sigma}\psi(\frac{n-\mu}{\sigma})}{1-\Phi(\frac{n-\mu}{\sigma})}\\
&= h_n(\mu); \qquad \text{利用}\frac{dh_n}{dn}>0 \ \text{(參見Nelson, W. 1982, p. 31)}\\
&> h_{n-\varepsilon}(\mu)\\
&= \frac{\frac{1}{\sigma}\psi(\frac{n-\varepsilon-\mu}{\sigma})}{1-\Phi(\frac{t-\varepsilon-\mu}{\sigma})}\\
&= \frac{\frac{1}{\sigma}\psi(\frac{n-(\varepsilon+\mu)}{\sigma})}{1-\Phi(\frac{n-(\varepsilon+\mu)}{\sigma})}
\end{aligned}
$$

由此顯示

$$\frac{\partial h_n(\mu)}{\partial\mu}<0 \qquad (a.2)$$

由(a.2)式可得知A爲 μ 之遞減函數。又A-B爲 n_0 之遞增函數，故我們可將A,B,n_0, μ 之關係表示如下：



26

由上圖可得知 n_0 為 μ 之遞增函數，即 $\frac{\partial n_0}{\partial\mu}<0$。

附錄二

因 $Q_n=q_n/n$，則由(4.11)可知

$$\left[p-\frac{C'(Q_n)}{n}\right]n^2h_n=[C''(Q_n)Q_n+C'(Q_n)] \qquad (b.1)$$

(b.1)式對 μ 微分，得

$$\left[p-\frac{C'(Q_n)}{n}\right]n^2\frac{\partial h_n(\mu)}{\partial\mu}+n^2h_n\left(-\frac{C''(Q_n)}{n}\frac{\partial Q_n(\mu)}{\partial\mu}\right)$$

$$= C'''(Q_n)Q_n\frac{\partial Q_n(\mu)}{\partial\mu}+C''(Q_n)\frac{\partial Q_n(\mu)}{\partial\mu}+C''(Q_n)\frac{\partial Q_n(\mu)}{\partial\mu}$$

所以，

$$\frac{\partial Q_n(\mu)}{\partial\mu}=\frac{[pn-C'(Q_n)]\,n\dfrac{\partial h_n(\mu)}{\partial\mu}}{C'''(Q_n)Q_n+(h_nn+2)C''(Q_n)} \qquad (b.2)$$

利用(4.11),(4.14),(a.2),(b.2)，得知

$$\frac{\partial Q_n(\mu)}{\partial\mu}<0$$

故

$$\frac{\partial q_n(\mu)}{\partial\mu}<0$$

附錄三

附錄二之(b.1)對σ微分，可得

$$\left[p-\frac{C'(Q_n)}{n}\right]n^2\frac{\partial h_n(\sigma)}{\partial\sigma}+n^2h_n\left(-\frac{C''(Q_n)}{n}\frac{\partial Q_n(\sigma)}{\partial\sigma}\right)$$

$$= C'''(Q_n)Q_n\frac{\partial Q_n(\sigma)}{\partial\sigma}+C''(Q_n)\frac{\partial Q_n(\sigma)}{\partial\sigma}+C''(Q_n)\frac{\partial Q_n(\sigma)}{\partial\sigma}$$

故

$$\frac{\partial Q_n(\sigma)}{\partial\sigma}=\frac{[pn-C'(Q_n)]\,n\dfrac{\partial h_n(\sigma)}{\partial\sigma}}{C'''(Q_n)Q_n+(h_nn+2)C''(Q_n)} \qquad (c.1)$$

由(4.11),(4.14),(a.2)及(c.1)四式，我們得知

$$\frac{\partial Q_n(\sigma)}{\partial\sigma}>0 \quad \text{若且唯若} \quad \frac{\partial h_n(\sigma)}{\partial\sigma}>0 \qquad (c.2)$$

將h_n對σ微分，導出

$$\frac{\partial h_n(\sigma)}{\partial \sigma} = \left[\int_n^\infty \exp\{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\}(n-\mu)^2\,dx - \int_n^\infty \exp\{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\}(x-\mu)^2\,dx\right] \bullet$$

$$\frac{(1/\sigma^3)\ \exp\{-(n-\mu)^2/2\sigma^2\}}{\left[\int_n^\infty \exp\{-(x-\mu)^2/2\sigma^2\}\,dx\right]^2} \qquad (c.3)$$

因爲

$$\frac{\partial}{\partial\sigma}\left[\ln\left(\frac{1}{\sigma}\psi\left(\frac{n-\mu}{\sigma}\right)\right)\right] = \frac{\partial}{\partial\sigma}\left[\ln\frac{1}{\sqrt{2\pi}} - \frac{(n-\mu)^2}{2\sigma^2} - \ln\sigma\right]$$

$$= \frac{1}{\sigma}\left[\left(\frac{n-\mu}{\sigma}\right)^2 - 1\right]$$

所以

$\frac{\partial}{\partial\sigma}\left[\ln\left(\frac{1}{\sigma}\psi\left(\frac{n-\mu}{\sigma}\right)\right)\right] > 0$若且唯若$|\frac{n-\mu}{\sigma}| > 1$。此顯示

情形(i)若$n < \mu - \sigma$,則$\frac{1}{\sigma}\psi\left(\frac{n-\mu}{\sigma}\right)$為$\sigma$的遞增函數且$1-\Phi(\frac{n-\mu}{\sigma})$

為σ的遞減函數。因此，$h_n(\sigma) = \frac{\frac{1}{\sigma}\psi(\frac{n-\mu}{\sigma})}{1-\Phi(\frac{n-\mu}{\sigma})}$為$\sigma$的遞增函數。

情形(ii)若$n > \mu$,則由$(c.3)$，我們可得$\frac{\partial h_n(\sigma)}{\partial\sigma} < 0$。

綜合(i)和(ii)，可得存在一實數r，其中$\mu - \sigma < r < \mu$，

當$n > r$時，$\frac{\partial h_n(\sigma)}{\partial\sigma} < 0$,　且當$n < r$時，$\frac{\partial h_n(\sigma)}{\partial\sigma} > 0$。

參考文獻

1. Basu, A. K., R. Lal, V. Srinivasan and R. Staelin (1985), "Salesforce Compensation Plans: An Agency Theoretic Perspective," Marketing Science, 4(4), 267-291.
2. Coughlan, A. T. and S. K. Sen (1989), "Salesforce Compensation: Theory and Managerial Implications," Marketing Science, 8(4), 324-342.
3. Farley, J. U. (1964), "An Optimal Plan for Salesmen's Compensaion," Journal of Marketing Research, 1(May), 39-43.
4. Kamien, M. I. and Schwarty, N. L. (1981), Dynamic Optimization: The Calculus of Variations and Optimal Control in Economics and Management, North Holland, New York.
5. Lal, R. (1986), "Delegating Pricing Responsibility to the Salesforce," Marketing Science, 5 (2), 159-168.
6. Lal, R. and R. Staelin (1986), "Salesforce Compensation Plans in Environ ments with Asymmetric Information," Marketing Science, 5(3), 179-198.
7. Nelson, W. (1982), Applied Life Data Analysis.
8. Rao, R. C. (1990), "Compensating heterogeneous Salesforces: Some Explicit Solutions," Marketing Science, 9(4), 319-341.
9. Srinivasan, V. (1981), "An Investigation of the Equal Commission Rate Policy for a Multi-product Salesforce, "Management Science, 27 (July), 731-756.
10. Weinberg, C. B. (1975), "An Optimal Commissions Plans for Salesmen's Control Over Price," Management Science, 21 (April), 937-943.