管　　理　　學　　報
第十六卷　第三期　民國八十八年九月
pp517-533

缺貨水準受限下具有品管機制之分配未知擴充報童問題

An Extended Distribution Free Newsboy Problem with Quality Control Mechanism under Shortage-Level Constraints

莊忠柱　*Chung-Chu Chuang*
眞理大學管理科學研究所副教授、所長兼
管理學院院長
Associate Professor
Dean of Management, and Chairman, Graduate
Institute of Management Sciences,
Aletheia University
陳淼勝　*Miao-Shen Chen*
南華大學環境管理研究所教授兼校長
Professor
President, Institute of Environment Management,
Nanhua University

(Receive September 4, 1998; First Revised December 21, 1998; Second Revised April 22, 1999; Accepted June 29, 1999)

摘要：傳統報童問題祇考慮某一特定時點的購貨量，除了忽略購貨時點是可選擇的情況外，同時也忽略了不同購貨時點所預測之需求量的變異數亦會不同的狀況。當供應商利用價格折扣誘使購貨商提早購貨時，購貨商則須承擔預測偏差成本以換取價格折扣利益；但購貨商越早購貨，就必需愈早預測未來需求量而使其預測偏差越大。當購貨商平均缺貨水準受限於缺貨率上限時，面對一個具有品質管制機制的擴充報童問題，如何同時決定其最適購貨時點與最適購貨量，以使得其成本最小，為本文主要研究內容。本文研究成果可應用於某些期貨商品的購貨決策問題。

關鍵字：存貨，報童問題，預測偏差，分配未知

ABSTRACT：In the classical newsboy problem, the order quantity has only been decided at a spot selling time. Both the purchase timing and the time-variant variance of forecasted demand are neglected. When the vendor gives a price discount to stimulate the buyer to advance purchase, the buyer purchases the quantities with a discounted price at the cost of forecast bias. When the buyer purchases commodity by changing his pre-planned schedule, it is necessary for the buyer to forecast the demand. This may increase the variance of the demand, which is a forecast bias. When average shortage rate is subject to a specified upper shortage-level, both optimal purchase timing and optimal order quantity are simultaneously decided in an extended distribution free newsboy problem with quality control mechanism in this paper. The resultant outcomes could apply to some cases in futures commodity contracts.

KEYWORDS: Inventory, newsboy problem, forecast bias, distribution free

壹、緒論

傳統報童問題可以想像成是：以未來銷售時點 T 之前的某一時點 t 所預測的需求量為基礎，來構建其存貨決策模式。因此其決策變數祇有一個；也就是如何決定購貨量，以使得存貨過多（Over-stocking）與存貨不足（Under-stocking）所發生的總成本最小（或總利潤最大）。

本文模式為傳統報童問題的擴充，其擴充的重點是將傳統報童問題過於簡化的一個決策變數，擴充為二個決策變數。這二個決策變數分別為：(1) 何時購貨（決定購貨時點）；(2) 購進多少貨品（決定購貨量）。購貨時點被考慮成決策變數的原因，乃是它不祇會影響進貨成本，同時也會影響預測銷售時點之需求量的準確度。預測需求量的時點（即購貨時點）愈晚（即愈靠近銷貨時點 T），其預測需求量的準確度就愈高（即預測需求量之隨機變數的變異數就愈小）；大部份期貨商品契約的購貨決策問題皆有這種：預測時點愈早，被預測需求量之隨機變數的變異數就愈大的現象。本文中的模式假設條件及應用場合與一般報童問題皆不同，其不同點至少下列五項：

（一）、傳統報童問題模式的單位進貨成本是給定的，其值不因購貨時點不同而異；而本文則假設供應商欲降低持有貨品的風險，採行愈早購買可享受愈高價格折扣方式，來吸引購貨商提早購貨。本文這種以「購貨時點不同，購貨折扣也不同」為基礎所構建的模式，與Anvari(1987)，Pfeifer(1989)，Anvari and Kusy(1990)，Chung(1990)及Moon and Choi(1994) 以「銷貨量不同，銷貨折扣也不同」所構建的模式，其應用場合有很大的區別。雖然Eeckhout(1995)等人利用較高的進貨價格允許再進貨方式來構建其模式，但與本文模式的一次購貨，顯然是不同的。

本文對貨品價格折扣的假設條件與處理方式，亦與其他相關文獻的皆不同。例如，Khouja(1995)的模式的特徵是將「銷貨價格折扣」對「需求」的影響納入考慮中，而本文的特徵之一是將「購貨時點不同所引起的購貨折扣」對「購貨成本」的影響納入考慮中。

（二）、本文模式對缺貨現象的處理方式與傳統報童問題模式中的處理方式不同。因單位缺貨成本包括契約規定的缺貨懲罰成本、顧客因缺貨造成不便而要求給予一些的折扣、商譽損失、失去潛在顧客而引起的損失等；而使得傳統報童問題模式中的單位缺貨成本很難透過經驗，加以衡量。因此有些學者紛改用缺貨率或平均缺貨率受限於某一水準下，來構建其存貨模式，如Ardal, Jonsson和 Jönsson(1989)，Moon和Choi(1994)。為增加本文模式的應用場合，本文將採用此方式來處理缺貨現象。

（三）、在各種報童問題的相關模式中，其用來表示需求量之隨機變數的變異數是給定的（即不會受到購貨時點決策變數值不同而改變），如Gerchhak and Parlar(1987)，Lau(1980)， Walker(1992，1993)；而本文則假設預測需求量時，若預測時點越靠近銷售時點，其預測需求量的變異數就愈小（即購貨商的預測偏差(Forecast Bias)愈小）。因此將需求量之預測偏差對預期存貨量與預期缺貨量的影響納入模式中考慮為本文的特徵之一，這項特徵在其它相關報童問題的文獻中尚未曾被採用。

（四）購貨商在貨品售出前，一般皆實施貨品檢驗，以確保貨品品質。當購貨商對其貨品實施全數檢驗時，不良品的存在將使得有效購貨量降低。此種將品質管制機制對預期存貨量與預期缺貨量的影響納入模式中加以考慮，將使模式更實際些，此亦為本文的特徵之一。

（五）購貨商在訂購具有季節性貨品時，可根據自己的經驗估計出需求量的平均數與變異數，但往往卻不知需求量的分配型態。因此有些學者嘗試利用需求量分配未知(Distribution Free)情形，來建構報童問題的模式，如Gallego和Moon(1993)，Moon和Choi(1994，1995)。本文則進一步將需求量分配未知與購貨時點結合在一起，以增加其應用場合。

本文模式可適用於某類型期貨商品契作的決策問題，可用來幫助季節性貨品盤商何時購貨及購買多少季節性貨品的問題。例如，消費者每年在情人節前向花店預購玫瑰花，而要求花店在情人節當天交貨，消費者的預購行為起因於擔心在情人節當天買不到玫瑰花。花店若向花農越早承攬玫瑰花的採收權，則越能享受優惠的價格；即能享受價格折扣越大。在此種情況下，花店在情人節之前何時向花農承攬玫瑰花的採收權及承攬多少數量，則是一個典型適用的例子。此外，零售商對中秋節文旦柚與中秋月餅應景產品之何時購貨及購貨多少，則是另一個適用的例子。

貳、假設與符號

一、 假設

（一） 面對供應商提供的價格折扣期間 $[0, T]$，購貨商必需在時點 0 決定購貨時點 t，並在時點 t 決定其購貨量 q。

（二） 購貨商在時點 0 估計其顧客在 $[0, T]$ 之間的需求（預購）量 X_0，X_0 為一隨機變數，其平均數為 μ，變異數為 σ^2。被預購的貨品必須在 T 時點送達顧客，購貨商才不致於喪失售貨的機會。

（三） 貨品被預購時點均勻分佈在 $[0, T]$ 之間。因此，購貨商的購貨時點 t 決定後，在 t 時點所估計之$[t, T]$ 間需求量的平均數為 $\mu(T-t)/T$，變異數為$[\sigma(T-t)/T]^2$。在 $[0, t]$ 之間的需求量，對決策時點 0 而言，為一隨機變數（其平均數為 $\mu t/T$，變異數為$[\sigma t/T]^2$）；但對決策時點 t 而言，為一確定數（可觀察的歷史

資料）。

二、符號

（一）參數

T= 銷貨時點(spot selling time)(=供應商提供折扣的折扣期間長度)

δ= 購貨商因提早一單位時間購買貨品，所獲得之單位貨品的購貨折扣

c_t= 在 t 時點購貨的單位進貨成本；其中 $c_t = c - \delta(T-t)$，$0 \leqq t \leqq T$ 且滿足 $c_T = c$ 與 $c_0 = c - \delta T$

v= 在 T 時點未售出貨品的單位殘值

h= 單位貨品在單位時間的持有成本

θ= 在 T 時點貨品的不良率

s= 在 T 時點每單位貨品的檢驗成本

（二）函數

X_t = 於時點 0 決定購貨時點為 t 後之 $[0, T]$ 時間內貨品的需求量；其中 $E(X_t) = E$(購貨時點 t 所觀察$[0, t]$內的需求量) + E(購貨時點 t 所預測$[t, T]$內的需求量) = $\dfrac{t}{T}\mu + \dfrac{T-t}{T}\mu = \mu$，$Var(X_t) = Var$(購貨時點 t 所觀察$[0, t]$內的需求量) + Var(購貨時點 t 所預測$[t, T]$內的需求量) =

$$0 + \left(\frac{T-t}{T}\sigma\right)^2 = \left(\frac{T-t}{T}\sigma\right)^2$$

F_{X_t} = 隨機變數 X_t 的分配函數

Ω_t= 購貨商在決策時點 0，決定購貨時點為 t 後，所對應之 $[0, T]$ 時間內貨品需求量的估計量 X_t，具有平均數 μ，變異數 $[(1-t/T)\sigma]^2$ 之分配函數 F_{X_t} 所構成的集合

（三）決策變數

t= 購貨商在時點 0 所決定的購貨時點，$0 \le t \le T$

q= 購貨商在購貨時點 t 決定後，在 t 時點所決定的購貨量

參、數學模式

供應商藉著提早購貨可享受價格折扣的方式，來誘導購貨商提早進貨，以降低供應商的銷售風險。因

[購貨商在（t, q）點的購貨成本] $-$ [購貨商在（t - $\Delta t, q$）點的購貨成本]

$= [c_t\, q + h\,(\,T - t\,)\,q\,]$ - $[\,c_{t\text{-}\Delta t}\, q + h\,(\,T - t + \Delta t)\,q]$

$=$ ($\delta\ - h$) $q\,\Delta t$，$\forall\, q$

故以下本文可假設$\delta > h$ ；否則購貨商的最佳購貨時點 t^* 必等於 T ，而使得本模式即為傳統報童問題模式。

購貨商在時點 0 ，先決定其購貨時點 t 後，他必須先以預測未來銷售時點 T 之需求量 X_t 的分配函數 F_t 為基礎，來決定時點 t 的購貨量 q。購貨商購貨後，貨品的所有權立即移轉。購貨商對於其顧客在 $[0, T]$ 間的需求量必須在 T 時點送達顧客手中。因而，貨品持有成本為 hq（T-t）。購貨商在銷貨時點 T 賣出貨品前，實施全數、非破壞性檢驗；若貨品的不良率為 θ 時，則其有效購貨量為（1-θ）q。因此，在 T 時點的未售出貨品的期望殘餘價值為 $v\,E\,[\,(1\text{-}\theta)\ q\text{ - }X_t]^+$，期望缺貨量為 $E[X_t -$（1-θ）$q]^+$。

假設購貨商所面臨的問題狀況為：（A）在 $t = 0$ 的單位進貨成本 c - δT、單位持有成本 hT 與在 T 時點單位貨品的檢驗成本 s ，三者之和，大於單位良品殘值（1 - θ）v；即不等式

$$c - \delta T + hT + s > (1 - \theta)\ v \tag{1}$$

成立。（1）式須成立的理由：若（1 - θ）$v > c$ - $\delta T + hT + s$，則購貨商在 $t = 0$ 每增購一單位貨品，即可增加利潤（1 - θ）$v - [c - (\delta\text{ - }h)T + s]$，而使得存貨決策問題沒有意義。（B）購貨商可根據經驗估計出 X_t 的平均數 μ 與變異數 $[(\,1 - t\,/\,T\,)\ \sigma]^2$ ，但卻不知其分配函數 F_{X_t} 的型態為何；即購貨商祇知 $F_{X_t} \in \Omega_t$，而不知 F_{X_t} 的確實型態。（C）購貨商對缺貨風險的處理型態為：平均缺貨率必須不能超過缺貨率上限β，$0 \leqq \beta \leqq 1$，即

$$\frac{\max\limits_{F_{X_t} \in \Omega_t} E\left[X_t - (1-\theta)q\right]^+}{E\left[X_t\right]} \leq \beta \tag{2}$$

（D）購貨商面對未確定 F_{X_t} 的型態對存貨成本影響的處理態度為：追求存貨成本的上界為最小，則其目標函數為

$$\mathop{Min}_{(t,\,q)}\ \mathop{Max}_{F_{X_t} \in \Omega_t}\ \ L = (c - \delta(T - t))q + h(T - t)q - vE[(1-\theta)q - X_t]^+ + sq \tag{3}$$

上式 $L(t, q)$ 中的第一項為貨品進貨成本，第二項為貨品持有成本，第三項為貨品未售出的期望殘餘價值，第四項為貨品實施全數非破壞性檢驗所發生的檢驗成本。在目標函數中並不包括準備成本（setup cost），此乃有沒有將準備成本包括在預期總成本並不影響模式的最佳解。

根據 Gallego與Moon[6]，可得

$$\max_{F_{X_t}\in\Omega_t} E\left[(1-\theta)q-X_t\right]^+ \le \frac{\left[\left(1-\frac{t}{T}\right)^2\sigma^2+\left((1-\theta)q-\mu\right)^2\right]^{\frac{1}{2}}+\left((1-\theta)q-\mu\right)}{2} \quad (4)$$

與

$$\max_{F_{X_t}\in\Omega_t} E\left[X_t-(1-\theta)q\right]^+ \le \frac{\left[\left(1-\frac{t}{T}\right)^2\sigma^2+\left((1-\theta)q-\mu\right)^2\right]^{\frac{1}{2}}-\left((1-\theta)q-\mu\right)}{2} \quad (5)$$

將（4）與（5）式分別代入（2）與（3）式，可得購貨商的最適存貨政策（t^*, q^*）為下列模式的最佳解。

模式(I)：

$$\underset{(t,q)}{Min} \quad L(t,q)=\left(c-(\delta-h)(T-t)-\frac{v(1-\theta)}{2}+s\right)q - \frac{v\left[\left(\frac{T-t}{T}\right)^2\sigma^2+\left((1-\theta)q-\mu\right)^2\right]^{\frac{1}{2}}}{2}+\frac{v\mu}{2} \quad (6)$$

$$s.t. \quad \frac{\left[\left(\frac{T-t}{T}\right)^2\sigma^2+\left((1-\theta)q-\mu\right)^2\right]^{\frac{1}{2}}-\left((1-\theta)q-\mu\right)}{2\mu}\le\beta \quad (7)$$

$$0\le q$$

$$0\le t\le T$$

由（6）式可得 $\frac{\partial L(t,q)}{\partial t}=(\delta-h)q+\frac{v(T-t)\sigma^2}{2T^2\left[\left(\frac{T-t}{T}\right)^2\sigma^2+((1-\theta)q-\mu)^2\right]^{1/2}}>0$，

$\forall\, t\in[0,T]$ 且（7）式左邊為 t 的減函數；因此最佳解（t^*,q^*）必使得（7）式的等號成立。故可將模式（I）的可行解限制在使得（7）式等號成立之（t,q）上考慮。令（7）式等號成立，可得 t 與 q 的關係如下：

$$\frac{T-t}{T}=Q,\ \text{其中}\ Q=\sqrt{\frac{4\beta\mu}{\sigma^2}\left[(1-\theta)q-\mu(1-\beta)\right]}\ \text{且}\ 0\le Q\le 1 \tag{8}$$

滿足（8）式的所有（t,q）為模式（I）的可行解，而最適解（t^*,q^*）必為可行解之一。由（8）式知，最適購貨時點與最適購貨量成反向關係；即購貨商的最適購貨時點愈早，其最適購貨量則愈大。利用（8）式，將 $\frac{T-t}{T}$ 值以 Q 值代入（6）式；可化簡得下列模式。

模式(II)：

$$\underset{0\le Q\le 1}{Min}\quad J(Q)=-\frac{(\delta-h)T\sigma^2}{4\beta\mu(1-\theta)}Q^3+\frac{(c+s-v(1-\theta))\sigma^2}{4\beta\mu(1-\theta)}Q^2-\frac{(\delta-h)T(1-\beta)\mu}{1-\theta}Q+\frac{(c+s)(1-\beta)\mu}{1-\theta} \tag{9}$$

其中模式（II）的可行解 Q 與模式（I）的可行解（t,q）之關係如（8）式所示。

肆、 模式的最佳解

令

$$D=\frac{c+s-v(1-\theta)}{(\delta-h)T} \tag{10}$$

且

$$G=\frac{\mu\sqrt{(1-\beta)\beta}}{\sigma} \tag{11}$$

由（1）與（10）式得知

$$D>1 \tag{12}$$

考慮（9）式對 Q 微分，並利用（10）及（11）式，可得

$$\frac{dJ(Q)}{dQ}=-\frac{3(\delta-h)T\sigma^2}{4\beta\mu(1-\theta)}\left[Q^2-\frac{2(c+s-v(1-\theta))}{3(\delta-h)T}Q+\frac{4\beta\mu^2(1-\beta)}{3\sigma^2}\right] \quad (13)$$

$$=\begin{cases}=-\dfrac{3(\delta-h)T\sigma^2}{4\beta\mu(1-\theta)}(Q-Q_l)(Q-Q_s),\ \text{if } D>2\sqrt{3}G & (14)\\[2ex] \le 0,\ \forall Q, \qquad \text{if } D\le 2\sqrt{3}G & (15)\end{cases}$$

其中

$$Q_l=\frac{D}{3}+\sqrt{\left(\frac{D}{3}\right)^2-\frac{4G^2}{3}}$$
$$Q_s=\frac{D}{3}-\sqrt{\left(\frac{D}{3}\right)^2-\frac{4G^2}{3}} \quad (16)$$

由（13）式得知，當 $D>2\sqrt{3}G$ 時，$J(Q)$，$Q\in[0,\infty)$，的圖形如圖1所示；其中 $\overline{Q}_s$ 可由下列計算過程求得：

由（9）及（16）式可得

$$J(Q)-J(Q_s)$$
$$=(Q-Q_s)\left(\frac{-(\delta-h)T\sigma^2}{4\beta\mu(1-\theta)}\right)\left\{Q^2+QQ_s+Q_s^2-\frac{c+s-v(1-\theta)}{T(\delta-h)}(Q+Q_s)+\frac{4\beta\mu^2(1-\beta)}{\sigma^2}\right\};$$

$$\text{利用(13)式}: 0=3Q_s^2-\frac{2(c+s-v(1-\theta))}{(\delta-h)T}Q_s+\frac{4\beta\mu^2(1-\beta)}{\sigma^2}$$

$$=(Q-Q_s)^2\left(\frac{-(\delta-h)T\sigma^2}{4\beta\mu(1-\theta)}\right)\left(Q-\left(\frac{D}{3}+2\sqrt{\left(\frac{D}{3}\right)^2-\left(\frac{2G}{\sqrt{3}}\right)^2}\right)\right)$$

因此

$$\overline{Q}_s=\frac{D}{3}+2\sqrt{\left(\frac{D}{3}\right)^2-\left(\frac{2G}{\sqrt{3}}\right)^2} \quad (17)$$

由（15）式與圖1得知：

唯有當 $D>2\sqrt{3}G$ 且 $Q_s<1<\overline{Q}_s$ 時，$Q^*=Q_s$；其他情形，$Q^*=1$ 皆成立 （18）

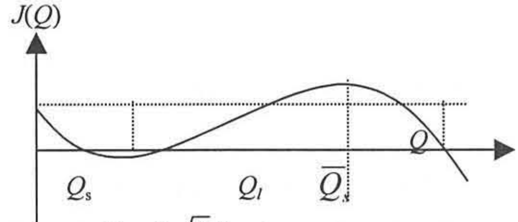

圖1 當 $D > 2\sqrt{3}G$ 時之 $J(Q)$ 的圖形

利用（16）與（17）式，可得

$$D > 2\sqrt{3}G \text{ 且 } Q_s < 1 < \overline{Q}_s$$

$$\Leftrightarrow D > 2\sqrt{3}G \text{且} -\sqrt{\left(\frac{D}{3}\right)^2 - \left(\frac{2G}{\sqrt{3}}\right)^2} < 1 - \frac{D}{3} < 2\sqrt{\left(\frac{D}{3}\right)^2 - \left(\frac{2G}{\sqrt{3}}\right)^2}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} D > 2\sqrt{3}G \text{且} 1 - \dfrac{D}{3} < 2\sqrt{\left(\dfrac{D}{3}\right)^2 - \left(\dfrac{2G}{\sqrt{3}}\right)^2}, & \text{若 } 1 - \dfrac{D}{3} \geq 0 \\ D > 2\sqrt{3}G \text{且} -\sqrt{\left(\dfrac{D}{3}\right)^2 - \left(\dfrac{2G}{\sqrt{3}}\right)^2} < 1 - \dfrac{D}{3}, & \text{若 } 1 - \dfrac{D}{3} < 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} D > 2\sqrt{3}G \text{且} D > 2\sqrt{4G^2+1} - 1, & \text{若 } D \leq 3 \\ D > 2\sqrt{3}G \text{且} D > \dfrac{3}{2} + 2G^2, & \text{若 } D > 3 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3 \geq D > \max\left\{2\sqrt{3}G, 2\sqrt{4G^2+1} - 1\right\} = 2\sqrt{4G^2+1} - 1 \\ \text{或} \\ D > \max\left\{3, \dfrac{3}{2} + 2G^2\right\} = \begin{cases} \dfrac{3}{2} + 2G^2, & \text{若 } G \geq \dfrac{\sqrt{3}}{2} \\ 3, & \text{若 } G \leq \dfrac{\sqrt{3}}{2} \end{cases} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} D > \dfrac{3}{2} + 2G^2, & \text{若 } G \geq \dfrac{\sqrt{3}}{2} \\ D > 2\sqrt{4G^2+1} - 1, & \text{若 } G \leq \dfrac{\sqrt{3}}{2} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow D > \max\left\{\frac{3}{2} + 2G^2, 2\sqrt{4G^2+1} - 1,\right\} \tag{19}$$

利用（16），（18）與（19）式，可得模式(II)的最佳解如下：

推論 1

(i) 若 $D > \max\left\{\frac{3}{2}+2G^2, 2\sqrt{4G^2+1}-1\right\}$，則 $Q^* = \frac{D}{3} - \sqrt{\left(\frac{D}{3}\right)^2 - \left(\frac{2G}{\sqrt{3}}\right)^2}$ (20)

(ii) 若 $D \le \max\left\{\frac{3}{2}+2G^2, 2\sqrt{4G^2+1}-1\right\}$，則 $Q^* = 1$。

由推論1可得知：最佳解 Q^* 係由需求分配參數 G 及存貨成本參數 D 之相對大小決定之。其中由（10）與（11）式得知：$G = \frac{\mu\sqrt{(1-\beta)\beta}}{\sigma}$ 與貨品需求分配參數 μ，σ，β 有關，而與存貨成本參數無關；而 $D = \frac{c+s-v(1-\theta)}{(\delta-h)T}$ 與存貨成本參數 c，δ，T，h，v，θ，s 有關，而與需求分配參數無關。

利用（8）式與推論1，可得模式(I)的最佳解如下：

推論 2

(i) 若 $D > \max\left\{\frac{3}{2}+2G^2, 2\sqrt{4G^2+1}-1\right\}$，則 $t^* = T(1-Q^*)$ 且

$$q^* = \frac{Q^{*2}\sigma^2 + 4\beta\mu^2(1-\beta)}{4\beta\mu(1-\theta)} \tag{21}$$

(ii) 若 $D \le \max\left\{\frac{3}{2}+2G^2, 2\sqrt{4G^2+1}-1\right\}$，則 $t^* = 0$ 且

$$q^* = \left[\frac{\sigma^2 + 4\beta\mu^2(1-\beta)}{4\beta\mu(1-\theta)}\right]。 \tag{22}$$

伍、範例與敏感度分析

一、範例

設現在距離情人節尚有60天，花農現在提供承攬玫瑰花的採收權，其每朵價格為10元，以後每朵每天增加1.5元。消費者可開始向花店預購玫瑰花，並要求花店必須在情人節當天交貨。花店根據其經驗，現在預測情人節玫瑰花的平均需求量為10000朵，標準差為2000朵，但不知其需求量之分配函數的型態。現在到情人節之間的某一天，花店必需向花農承攬玫瑰花的採收權，以維持平均缺貨率不超過5%，而期間所承擔的資金成本、施肥與噴灑農藥等所負擔的每天每朵成本為1.2元。若玫瑰花的不良率為20%，花店為確保其品質，須花費1元

的人工檢驗成本。情人節後的每朵玫瑰花價值祇剩20元。在此種情況下，$\mu = 10000$ 朵，$\sigma = 2000$ 朵，$T = 60$ 天，$h = 1.2$ 元/每天每朵，$\delta = 1.5$ 元/每天每朵，$c = 100$ 元/每朵，$v = 20$ 元/每朵，$s = 1$ 元/每朵，$\beta = 0.05$ 與 $\theta = 0.2$。由（10）與（11）式，可得 $D = 4.52$ 與 $G = 1.09$。利用推論 1，因 $D > \max\{3.88, 3.80\}$，可得 $Q^* = 0.68$。再利用推論 2，可得最適購貨時點 $t^* = 19.36$ 與最適購貨量 $q^* = 10630.29$，即花店需再等待19天後再承攬玫瑰花的採收權且承攬的數量約為10630朵。

二、敏感度分析

由（8）與（20）式，並利用（11）式，可得

$$\frac{\partial q^*}{\partial G} = \frac{\partial q^*}{\partial Q^*}\frac{\partial Q^*}{\partial G} = \frac{2\sigma(T-t)\sqrt{\beta(1-\beta)}}{3T\beta(1-\theta)\sqrt{\left(\frac{D}{3}\right)^2 - \left(\frac{2G}{\sqrt{3}}\right)^2}} > 0 \qquad (23)$$

$$\frac{\partial t^*}{\partial G} = \frac{\partial t^*}{\partial Q^*}\frac{\partial Q^*}{\partial G} = -\frac{4T\mu\sqrt{\beta(1-\beta)}}{3\sigma\sqrt{\left(\frac{D}{3}\right)^2 - \left(\frac{2G}{\sqrt{3}}\right)^2}} < 0 \qquad (24)$$

即需求分配參數與最適購貨量成正向關係，與最適購貨時點成反向關係。

又由（8）與（20）式，並利用（10）式，可得

$$\frac{\partial q^*}{\partial D} = \frac{\partial q^*}{\partial Q^*}\frac{\partial Q^*}{\partial D} = \frac{\sigma^2(T-t)}{6T\beta\mu(1-\theta)}\left(1-\left(\sqrt{1-12\left(\frac{G}{D}\right)^2}\right)^{-1}\right);\ \text{利用}\left(\frac{D}{3}\right)^2 > \left(\frac{2G}{\sqrt{3}}\right)^2 < 0 \qquad (25)$$

$$\frac{\partial t^*}{\partial D} = \frac{\partial t^*}{\partial Q^*}\frac{\partial Q^*}{\partial D} = -\frac{T}{3}\left(1-\left(\sqrt{1-12\left(\frac{G}{D}\right)^2}\right)^{-1}\right);\ \text{利用}\left(\frac{D}{3}\right)^2 > \left(\frac{2G}{\sqrt{3}}\right)^2 > 0 \qquad (26)$$

即存貨成本參數與最適購貨量成反向關係，與最適購貨時點成正向關係。

（1）需求量標準差 σ 變動的影響效果

由（11）與（23）式，整理可得

$$\frac{\partial q^*}{\partial \sigma} = \frac{\partial q^*}{\partial G^*}\frac{\partial G^*}{\partial \sigma} = -\frac{2\mu(1-\beta)(T-t)}{3T(1-\theta)\sigma\sqrt{\left(\frac{D}{3}\right)^2 - \left(\frac{2G}{\sqrt{3}}\right)^2}} < 0 \qquad (27)$$

即需求量標準差的增加，購貨商的最適購貨量減少。

利用（11）與（24）式，整理可得

$$\frac{\partial t^*}{\partial \sigma}=\frac{\partial t^*}{\partial G^*}\frac{\partial G^*}{\partial \sigma}=\frac{4T\mu^2(1-\beta)\beta}{3\sigma^3\sqrt{\left(\frac{D}{3}\right)^2-\left(\frac{2G}{\sqrt{3}}\right)^2}}>0 \tag{28}$$

即需求量標準差的增加，購貨商的最適購貨時點延後。

（2）平均需求量 μ 變動的影響效果

由（11）與（23）式，整理可得

$$\frac{\partial q^*}{\partial \mu}=\frac{\partial q^*}{\partial G^*}\frac{\partial G^*}{\partial \mu}=\frac{2(1-\beta)(T-t)}{3T(1-\theta)\sqrt{\left(\frac{D}{3}\right)^2-\left(\frac{2G}{\sqrt{3}}\right)^2}}>0 \tag{29}$$

即平均需求量的增加，購貨商的最適購貨量增加。

利用（11）與（24）式，整理可得

$$\frac{\partial t^*}{\partial \mu}=\frac{\partial t^*}{\partial G^*}\frac{\partial G^*}{\partial \mu}=-\frac{4T\mu(1-\beta)\beta}{3\sigma^2\sqrt{\left(\frac{D}{3}\right)^2-\left(\frac{2G}{\sqrt{3}}\right)^2}}<0 \tag{30}$$

即平均需求量的增加，購貨商的最適購貨時點提早。

（3）缺貨率上限 β 變動的影響效果

由（11）與（23）式，整理可得

$$\frac{\partial q^*}{\partial \beta}=\frac{\partial q^*}{\partial G^*}\frac{\partial G^*}{\partial \beta}=\frac{\mu(1-2\beta)(T-t)}{3\beta T(1-\theta)\sqrt{\left(\frac{D}{3}\right)^2-\left(\frac{2G}{\sqrt{3}}\right)^2}}=\begin{cases}>0, if\ \beta<\frac{1}{2}\\<0, if\ \beta>\frac{1}{2}\end{cases} \tag{31}$$

即當缺貨率上限小於 1/2時（實務上較常見），缺貨率上限的增加，購貨商的最適購貨量增加。

利用（11）與（24）式，整理可得

$$\frac{\partial t^*}{\partial \beta}=\frac{\partial t^*}{\partial G^*}\frac{\partial G^*}{\partial \beta}=-\frac{2T\mu^2(1-2\beta)}{3\sigma^2\sqrt{\left(\frac{D}{3}\right)^2-\left(\frac{2G}{\sqrt{3}}\right)^2}}=\begin{cases}<0, if\ \beta<\frac{1}{2}\\>0, if\ \beta>\frac{1}{2}\end{cases} \tag{32}$$

即當缺貨率上限小於 1/2 時（實務上較常見），缺貨率上限的增加，購貨商的最適購貨時點

提早。

（4）供應商單位貨品定價 c 變動的影響效果

由（10）與（25）式，整理可得

$$\frac{\partial q^*}{\partial c}=\frac{\partial q^*}{\partial D^*}\frac{\partial D^*}{\partial c}=\frac{\sigma^2(T-t)}{6(\delta-h)T^2\beta\mu(1-\theta)}\left(1-\left(\sqrt{1-12\left(\frac{G}{D}\right)^2}\right)^{-1}\right)<0 \qquad (33)$$

即供應商單位貨品定價的增加，購貨商的最適購貨量反而減少。

利用（10）與（26）式，整理可得

$$\frac{\partial t^*}{\partial c}=\frac{\partial t^*}{\partial D^*}\frac{\partial D^*}{\partial c}=-\frac{1}{3(\delta-h)}\left(1-\left(\sqrt{1-12\left(\frac{G}{D}\right)^2}\right)^{-1}\right)>0 \qquad (34)$$

即供應商單位貨品定價的增加，購貨商的最適購貨時點延後。

（5）每單位時間單位貨品進貨折扣 δ 變動的影響效果

由（10）與（25）式，整理可得

$$\frac{\partial q^*}{\partial \delta}=\frac{\partial q^*}{\partial D^*}\frac{\partial D^*}{\partial \delta}=-\frac{\sigma^2(c+s-v(1-\theta))(T-t)}{6(\delta-h)^2T^2\beta\mu(1-\theta)}\left(1-\left(\sqrt{1-12\left(\frac{G}{D}\right)^2}\right)^{-1}\right)>0 \qquad (35)$$

即每單位時間單位貨品進貨折扣的增加，購貨商的最適購貨量增加。

利用（10）與（26）式，整理可得

$$\frac{\partial t^*}{\partial \delta}=\frac{\partial t^*}{\partial D^*}\frac{\partial D^*}{\partial \delta}=\frac{(c+s-v(1-\theta))}{3(\delta-h)^2}\left(1-\left(\sqrt{1-12\left(\frac{G}{D}\right)^2}\right)^{-1}\right)<0 \qquad (36)$$

即每單位時間單位貨品進貨折扣的增加，購貨商的最適購貨時點提早。

（6）每單位時間單位貨品持有成本 h 變動的影響效果

由（10）與（25）式，整理可得

$$\frac{\partial q^*}{\partial h}=\frac{\partial q^*}{\partial D^*}\frac{\partial D^*}{\partial h}=\frac{\sigma^2(c+s-v(1-\theta))(T-t)}{6(\delta-h)^2T^2\beta\mu(1-\theta)}\left(1-\sqrt{1-12\left(\frac{G}{D}\right)^2}\right)^{-1}<0 \qquad (37)$$

即每單位時間單位貨品持有成本的增加，購貨商的最適購貨量減少。

利用（10）與（26）式，整理可得

$$\frac{\partial t^*}{\partial h}=\frac{\partial t^*}{\partial D^*}\frac{\partial D^*}{\partial h}=-\frac{(c+s-v(1-\theta))}{3(\delta-h)^2}\left(1-\left(\sqrt{1-12\left(\frac{G}{D}\right)^2}\right)^{-1}\right)>0 \tag{38}$$

即每單位時間單位貨品持有成本的增加，購貨商的最適購貨時點延後。

（7）未售出貨品單位殘值 v 變動的影響效果

由（10）與（25）式，整理可得

$$\frac{\partial q^*}{\partial v}=\frac{\partial q^*}{\partial D^*}\frac{\partial D^*}{\partial v}=-\frac{\sigma^2(T-t)}{6(\delta-h)T^2\beta\mu}\left(1-\left(\sqrt{1-12\left(\frac{G}{D}\right)^2}\right)^{-1}\right)>0 \tag{39}$$

即未售出貨品單位殘值的增加，購貨商的最適購貨量增加。

利用（10）與（26）式，整理可得

$$\frac{\partial t^*}{\partial v}=\frac{\partial t^*}{\partial D^*}\frac{\partial D^*}{\partial v}=\frac{(1-\theta)}{3(\delta-h)}\left(1-\left(\sqrt{1-12\left(\frac{G}{D}\right)^2}\right)^{-1}\right)<0 \tag{40}$$

即未售出貨品單位殘值的增加，購貨商的最適購貨時點提早。

（8）供應商提供折扣的折扣期間長度 T 變動的影響效果

由（10）與（25）式，整理可得

$$\frac{\partial q^*}{\partial T}=\frac{\partial q^*}{\partial D^*}\frac{\partial D^*}{\partial T}=-\frac{\sigma^2(c+s-v(1-\theta))(T-t)}{6(\delta-h)T^3\beta\mu(1-\theta)}\left(1-\left(\sqrt{1-12\left(\frac{G}{D}\right)^2}\right)^{-1}\right)>0 \tag{41}$$

即供應商提供折扣的折扣期間長度的增加，購貨商的最適購貨量增加。

利用（10）與（26）式，整理可得

$$\frac{\partial t^*}{\partial T}=\frac{\partial t^*}{\partial D^*}\frac{\partial D^*}{\partial T}=\frac{(c+s-v(1-\theta))}{3(\delta-h)T}\left(1-\left(\sqrt{1-12\left(\frac{G}{D}\right)^2}\right)^{-1}\right)<0 \tag{42}$$

即供應商提供折扣的折扣期間長度的增加，購貨商的最適購貨時點提早。

（9）貨品不良率 θ 變動的影響效果

由（10）與（25）式，整理可得

$$\frac{\partial q^*}{\partial \theta}=\frac{\partial q^*}{\partial D^*}\frac{\partial D^*}{\partial \theta}=\frac{\sigma^2 v(T-t)}{6(\delta-h)T^2\beta\mu(1-\theta)}\left(1-\left(\sqrt{1-12\left(\frac{G}{D}\right)^2}\right)^{-1}\right)<0 \tag{43}$$

即貨品不良率的增加，購貨商的最適購貨量減少。

利用（10）與（26）式，整理可得

$$\frac{\partial t^*}{\partial \theta}=\frac{\partial t^*}{\partial D^*}\frac{\partial D^*}{\partial \theta}=-\frac{v}{3(\delta-h)}\left(1-\left(\sqrt{1-12\left(\frac{G}{D}\right)^2}\right)^{-1}\right)>0 \tag{44}$$

即貨品不良率的增加，購貨商的最適購貨時點延後。

（10）單位貨品的檢驗成本 s 變動的影響效果

由（10）與（25）式，整理可得

$$\frac{\partial q^*}{\partial s}=\frac{\partial q^*}{\partial D^*}\frac{\partial D^*}{\partial s}=\frac{\sigma^2(T-t)}{6(\delta-h)T^2\beta\mu(1-\theta)}\left(1-\left(\sqrt{1-12\left(\frac{G}{D}\right)^2}\right)^{-1}\right)<0 \tag{45}$$

即單位貨品的檢驗成本的增加，購貨商的最適購貨量減少。

利用（10）與（26）式，整理可得

$$\frac{\partial t^*}{\partial s}=\frac{\partial t^*}{\partial D^*}\frac{\partial D^*}{\partial s}=-\frac{1}{3(\delta-h)}\left(1-\left(\sqrt{1-12\left(\frac{G}{D}\right)^2}\right)^{-1}\right)>0 \tag{46}$$

即單位貨品的檢驗成本的增加，購貨商的最適購貨時點延後。

陸、結論

對一平均缺貨率受限於缺貨率上限的分配未知擴充報童問題，本文構建了一個含有品質管制機制的數學模式，用來同時決定最適購貨時點與最適購貨量。

文中發現可把問題的參數分成兩類：（1）需求分配參數 － 由平均需求量、需求量的標準差與缺貨率上限表示；（2）存貨成本參數 － 由供應商單位貨品定價、每單位時間單位貨品進貨折扣、供應商提供折扣的折扣期間長度、每單位時間單位貨品持有成本、未售出貨品單位殘值、單位貨品的檢驗成本與貨品不良率表示。利用存貨成本參數與需求分配參數的相對大小，則可決定模式的最佳解（參閱推論（I））。此外，最適購貨時點與需求分配參數呈反向關係（參閱（24）式），最適購貨量與需求分配參數呈正向關係（參閱（23）式）。又最適購貨時點與存貨成本參數呈正向關係（參閱（26）式），最適購貨量與存貨成本參數呈反向關係（參閱（25）式）。在購貨商具有對貨品實施非破壞性、全數品質檢驗制度下，當缺貨率上限增加時，則購貨商的最適購貨量增加（參閱（31）式），購貨商的最適購貨時點提早（參閱（32）式）。當單位貨品檢驗成本增加時，購貨商的最適購貨量減少（參閱（45）

式），購貨商的最適購貨時點延後（參閱（46）式）。當貨品不良率的增加，購貨商的最適購貨量減少（參閱（43）式），最適購貨時點延後（參閱（44）式）。此外，本文亦發現最適購貨時點與最適購貨量成反向關係（參閱（8）式）。這些特性可供購貨商決定最適存貨政策的參考。

參考文獻

1. Anvari, M.(1987), "Optimality Criteria and Risk in Inventory Models: The Case of The Newsboy Problem," Journal of Operational Research Society, 38, pp. 625-632.
2. Anvari, M. and M. Kusy,(1990), "Risk in Inventory Models: Review and Implementation," Engineering Costs and Production Economics, 19, pp. 267-272.
3. Ardal, K., Ö. Jonsson, and H. Jönsson(1989), "Optimal Inventory Policies with Service-Level Constraints," Journal of the Operational Research Society, 40, pp. 65-73.
4. Chung, K. H.(1990), "Risk in Inventory Models: The Case of The Newsboy Problem–Optimality Conditions," Journal of Operational Research Society, 41, pp. 173-176.
5. Eeckhoudt, L., C. Gollier and H. Schlesinger(1995), "The Risk-Averse (and Prudent) Newsboy," Management Science, 41, pp. 786-794.
6. Gallego, G. and I. Moon(1993), "The Distribution Free Newsboy Problem: Reviews and Extensions," Journal of Operational Research Society, 44, pp. 825-834.
7. Gerchak, Y. and M. Parlar(1987), "A Single Period Inventory Problem with Partially Controllable Demand," Computer and Operation Research, 14 , pp. 1-9.
8. Khouja, M.(1995), "The Newsboy Problem under Progressive Multiple Discounts," European Journal of Operational Research, 84, pp. 458-466.
9. Lau, H.(1980), "The Newsboy Problem under Alternative Optimization Objectives," Journal of Operational Research Society, 31, pp. 525-535.
10. Moon, I. and S. Choi(1994), "The Distribution Free Continuous Review Inventory System with a Service-Level Constraint," Computer and Industrial Engineering, 27, pp. 209-212.
11. Moon, I. and S. Choi(1995), "The Distribution Free Newsboy Problem with balking," Journal of Operational Research Society, 46, pp. 537-542.

12. Pfeifer, P. E.(1989), "The Airline Decision Fare Allocation Problem," Decision Sciences, 20, pp. 149-157.

13. Walker, J.(1992), "The Single-Period Inventory Problem with Uniform Demand," International Journal of Operations & Production Management, 12, pp. 79-84.

14. Walker, J.(1993), "The Single-Period Inventory Problem with Triangular Demand Distribution," Journal of Operational Research Society, 44, pp. 725-731.