行政院國家科學委員會專題研究計畫 成果報告

質數間距變化之研究(2/2)
研究成果報告(完整版)

計 畫 類 別 ：個別型
計 畫 編 號 ：NSC 94-2115-M-343-001-
執 行 期 間 ：94 年 08 月 01 日至 95 年 10 月 31 日
執 行 單 位 ：南華大學電子商務管理學系

計畫主持人：鄭國順
共同主持人：蔡宏榮
計畫參與人員：個別型計畫：鄭國順、蔡宏榮

處 理 方 式 ：本計畫涉及專利或其他智慧財產權，1 年後可公開查詢

中 華 民 國 96 年 01 月 18 日

行政院國家科學委員會補助專題研究計畫 ☑ 成 果 報 告
□期中進度報告

質數間距變化之研究

計畫類別：☑ 個別型計畫　　□ 整合型計畫
計畫編號：NSC 94－2115－M－343－001－
執行期間： 94 年 08 月 01 日至 95 年 10 月 31 日

計畫主持人：鄭國順　南華大學電子商務管理系
共同主持人：蔡宏榮　吳鳳技術學院機械系
計畫參與人員：

成果報告類型(依經費核定清單規定繳交)：□精簡報告　☑完整報告

本成果報告包括以下應繳交之附件：
□赴國外出差或研習心得報告一份
□赴大陸地區出差或研習心得報告一份
□出席國際學術會議心得報告及發表之論文各一份
□國際合作研究計畫國外研究報告書一份

處理方式：除產學合作研究計畫、提升產業技術及人才培育研究計
列管計畫及下列情形者外，得立即公開查詢
□ 涉及專利或其他智慧財產權，□一年□二年後可公開查詢

執行單位：南華大學　電子商務管理系

中 華 民 國 96 年 01 月 16 日

一、中英文摘要：

本計畫主要探討相鄰質數間距之變化，若以 $P_1 = 2, P_2 = 3, P_3, P_4 \ldots\ldots$ 為依大小排列之質數，令 $d_n = P_{n+1} - P_n$，則有一些有趣的猜測，如 Cramer 在 1937 年猜 $d_n = O(\log P_n)^2$，到目前仍然只是猜測，1986 年 Mozzochi 得到下列結果，$d_n = O(P_n^{\theta}), \theta = \frac{11}{20} - \frac{1}{384}$。本計畫希望能証明 $d_n = O(P_n^{\frac{1}{2}})$ 是正確的。

ABSTRACT

In this project,we consider the gaps between primes, If $P_1, P_2, P_3 \ldots\ldots$, is the sequence of primes, $d_n = P_{n+1} - P_n$, then thae are interesting conjectwes about d_n, In 1937, Cramer conjecture that $d_n = O(\log P_n)^2$. Mozzochi obtained at 1986 that $d_n = O(P_n^{\theta})$ with $\theta = \frac{11}{20} - \frac{1}{384}$,We intended to prove that $d_n = O(P_n^{\frac{1}{2}})$.

二、計畫緣由與目的

自古以來，探討質數的分佈與特性乃是研究數論中一個有趣的領域。若將質數依照大小次序排列，可以排列成$P_1=2$，$P_2=3$，$P_3=5$，$P_4=7$，$P_5=11$…等。對於質數的探討方式有很多，包括最早期計算$\pi(x)$，

$$\pi(x) \sim \frac{x}{\log x} \text{ 當 } x \to \infty \text{；} \quad (2)$$

其中$\pi(x)$表示不大於x的質數個數。由於實際上計算花費很多的計算時間，因此，在 19 世紀中期，天文學家 Meissel [1]發現較實際的方法計算$\pi(x)$，之後 1959 年的 Lehmer、1985 年和 1987 年的 Lagarias 等人[2-3]與 1996 年的 Deleglise 等人[4]一直探討$\pi(x)$和$\log(x)$的關連性。至於$\pi(x)$彼此間的相關性探討在 1845 年，Bertrand 經由實際的觀察，提出猜測如下：

若$n \geq 2$，則介於 n 與 2n 之間有一質數。這猜測於 1852 年被 Tschebycheff 所證實。此外，1882 年，Operman 提出$\pi(n^2+n) > \pi(n^2) > \pi(n^2-n)$，$n$>1 之猜測。1904 年 Brocord 提出$\pi({P_{n+1}}^2) - \pi({P_n}^2) \geq 4$之猜測。然而這兩個猜測仍然等待人們去解決。

另一方面，也有探討兩相鄰質數間距的大小，其中質數的間距表示為$d_n = P_{n+1} - P_n$，若$n \geq 2$，若d_n的最小值是 2；當n非常大，則數列$\{d_n\}_{n=1}^{\infty}$變的非常不規則，然而有關d_n的一些特性到目前為止仍然缺乏定論。當給定一區間$[x, x+y]$，其中$y = x^{\theta}, \frac{1}{2} < \theta < 1$，則在區間$[x, x+y]$中質數的個數，可以$\pi(x+y) - \pi(x)$表示。

在 1930 年 Hoheisel[5]得到對任意$\varepsilon > 0$，當$\theta = 1 - \frac{1}{33000} + \varepsilon$時

$$\pi(x+y) - \pi(x) \sim \frac{y}{\log x} \text{；} \quad (3)$$

我們可取相同的θ值，使得$d_n = 0({P_n}^{\theta})$。

在 1937 年，Cramer 也猜測$d_n = 0((\log(P_n))^2)$。而 Ingham 得到一更好的結果，即對任意$\varepsilon > 0$，$d_n = 0(P_n^{\frac{5}{8}+\varepsilon})$ [6]；

在 1969 年，Montgomery 得到 $\theta=\frac{3}{5}+\varepsilon$ [7]；

在 1972 年，Huxley 得到 $\theta=\frac{7}{12}+\varepsilon$ [8]；

在 1979 年，Iwaniec & Jutila 得到 $\theta=\frac{13}{23}+\varepsilon$ [9]；

在 1979 年，Heath-Brown & Iwaniec 得到更好的結果 $\theta=\frac{11}{20}+\varepsilon$ [10]；

而 Pintz（1981，1984）與 Mozzochi（1986）更推導出 $\theta=\frac{11}{20}-\frac{1}{384}$ [11-13]；

綜合以上質數間距之 θ 值的探討，得知 θ 的值越來越逼近 $\frac{1}{2}$，因而期望本計劃可以推導出更佳的結果。

三、結果與探討

由前三年的失敗經驗中，這兩年另外找尋更新的方法，發現一些可能會有好結果的方法，目前尚在進行中，預計我們會得到下列結果：

（1） 在 n^2 與 $(n+2)^2$ 之間至少有一質數。

（2） $P_n=0(P_n^{\frac{1}{2}})$。

四、計畫成果自評

本計畫想要証明的結果是非常困難的結果，用解析數論的方法大概很難証明，因此我們才想用組合的方法來証明，目前的進展尚未到決定性階段，我們會持續進行。

五、參考文獻

1.Meissel,E.D.F.,Uber die Bestimmung der Primzahlenmenge innerhalb gegebener Grenzen,Math.Ann.2(1870),pp.636-642.

2.Lagarias,J.C.,Miller,J.C. and Odlyzko,A.M.,Computing $\pi(x)$:The Meissel-Lehmer Method,Math.Comp.44(1985),pp.537-560.MR 86H:11111

3.Lagarias,J.C.and Odlyzko,A.M.,Computing $\pi(x)$:An analytic method,J.Algorithms 8(1987),pp.173-191.MR.88k:11095

4.Deleglise,M. and Rivat,J.,Computing $\pi(x)$:The Meissel,Lehmer,Lagarias,Miller,Odlyzko Method, Meth.Comp.65(1996),pp.235-245.

5.Hoheisel,G.,Primzahlprobleme in der Analysis.Sitz.Preuss.Akad. Wiss.33(1930), pp.580-588.

6.Ingham,A.E.,On the difference between consecutive primes. Quart. J. Math. 8(1937), pp. 255-266

7.Montgomery,H.L.,Zeros of L-functions.Inventiones Math.8(1969),pp.346-354

8.Huxley,M.N.,On the difference between consecutive primes. Inventiones Math. 15(1972), pp.164-170

9.Iwaniec, H. and Jutila, M., Primes in short intervals, Ark. Mat. 17(1979),pp.167-179. MR 80j; 10047

10.Heath Brown, D.R. and Iwaniec, H., On the difference between consecutive primes. Inventiones Math. 55(1979),pp.49-69.

11.Mozzochi, M.J., On the difference between consecutive primes. Journal of numbertheory 24,(1986),pp.191-187.

12.Pintz, J. On primes in short intervals I. Studia Sci. Math. Hunga.16(1981),pp.395-414.

13.Pintz, J. On primes in short intervals II. Studia Sxientiarum Mathematicarum Hungarica. 19(1984),pp.89-96.