管理科學研究 Vol.7, No.1, 2010 第 1-16 頁

以直覺模糊集合為基礎發展多屬性決策之排列評估法

The Permutation Method in Multiple Attribute Decision Making Based on Intuitionistic Fuzzy Sets

陳亭羽[1]　湯宇達[2]

(Received: Feb. 9, 2009；First Revision: Jun. 18, 2009；Accepted: Dec. 8, 2009)

摘要

多屬性決策分析為個體和群體決策中極為重要的一部分，其問題伴隨著主觀且模糊的存在，因此在實務面受到廣泛討論及應用。本研究乃以直覺模糊集合為基礎來探討多屬性決策問題中的直覺模糊排列評估法，目的在於提出一套新的排列評估法。但是，因所需取得的資料性質屬直覺模糊，資料蒐集困難，得不到完整的決策矩陣，因此嘗試以模擬實驗的方式探討資料蒐集不全時的情境分析。在實驗分析的部份，用簡化決策矩陣及權重的方式，克服資料蒐集的難處，並使用一致率、矛盾率、反轉率與等級相關係數四大指標，比較最後的結果是否和簡化前一致。實驗結果發現，簡化前後的兩個矩陣，前三個指標的平均維持相當高的程度，特別在等級相關係數的部分，呈現出平均值越高，標準差越低的趨勢，代表簡化後的矩陣不會喪失過多的資訊量，兩者的運算結果會越趨一致。

關鍵詞：多屬性決策、直覺模糊集合、排列評估法、模擬實驗。

Abstract

The multiple attribute decision making analysis has been widely discussed and applied by means of plenty of empirical works because it plays a crucial role in individual and group decision making problems which contain some subjective and fuzzy nature. The purpose of this study is to propose a new permutation method with intuitionistic fuzzy sets in multiple attribute decision making problems. However, due to the fact that it is not only difficult to obtain intuitionistic fuzzy data, but also incapable of acquiring the complete decision matrix, we use the simulation experiment to discuss the conditions of incomplete data. In the experimental analysis, the simplified decision matrices and weights are employed to overcome the difficulty of data collections. Besides, four indices of the consistency rate, contradiction rate, inversion rate, and Spearman rank order correlation coefficient compare the outcomes between simplified and non-simplified data. The experimental results indicate that the first three indices maintain quite high average values.

[1]長庚大學工商管理學系副教授
[2]長庚大學企業管理研究所碩士

In particular, the rank order correlation coefficients show the higher the average values, the lower the deviations of average values. It represents the simplified matrices do not lose too much information; instead, the results of computation between simplified and non-simplified data converge eventually.

Keywords: Multiple Attribute Decision Making, Intuitionistic Fuzzy Set, Permutation Method, Simulation Experiment

1. 緒論

模糊集合理論是由美國自動控制學家 Zadeh (1965)所提出，此理論改變以往僅以二值邏輯判斷事物的限制，強調用模糊邏輯來描述實際生活中各項事物的特性，主要處理一些邊界性質無法明確定義的集合。重要性在於模糊概念的確立，屬於該成份的模糊程度命名為隸屬程度(Degree of membership)，隸屬函數給每個成份分派一單值，範圍規範在零到一之間，非隸屬程度(Degree of non-membership)自動的成為隸屬程度的補數(Complement)。在實際生活應用下，為了對知識與語意的表達更具實用性，Atanassov (1986)著眼於 Zadeh (1965)的觀點，將之延伸後提出直覺模糊集合(Intuitionistic fuzzy set. IFS)，使模糊集合的概念更盡完備。直覺模糊集合給定隸屬程度與非隸屬程度，兩程度彼此相互獨立，唯一的要求在於兩程度的加總必不能超越一，此限制式代表了模型中對於未知資訊可由額外的游移程度(Hesitancy degree)表明。

其後的數十年間，模糊集合理論與直覺模糊集合理論逐漸為學者所研究，Atanassov (1999)提出直覺 L 型模糊集合(Intuitionistic L-fuzzy set)與區間值直覺模糊集合(Interval-valued intuitionistic fuzzy set)兩種理論，兩者將 L 型模糊概念和區間值概念廣義運用於 IFS。其中，Wang and He (2000)及 Deschrijver and Kerre (2003)皆表明 L 型模糊集合若以完整的 lattice 觀點即為 IFS，Deschrijver and Kerre (2003)更指出 IFS 同構於區間模糊集合(Interval-valued fuzzy set)，由 Gau and Buehrer (1993)所定義的含糊集合(Vague sets)也由 Bustince and Burollo (1996)點明其觀點等同於 IFS。這些理論雖各自運用在不同的區塊，但並非各自獨立，而是在數學上存在著等價關係(Deschrijver and Kerre, 2006)。

本研究主要著重於直覺模糊決策的多屬性決策應用，過往Szmidt and Kacprzyk (1996, 1998, 2002, 2004)利用直覺模糊集合，搭配相似度測量的概念，來解決群體決策的問題。Li (2005)使用數種線性規劃模組來產生屬性的最理想權重，並提出相應的多屬性決策處理方法。Atanassov and Georgiev (1993)以直覺模糊理論來建模各種不同形式的不精確性，發展出邏輯程式的系統，此種架構的討論呈現不確定性條件下的專家系統。Xu and Yager (2006)在直覺模糊集合上發展出一些幾何加總的運算子，並應用它們來處理多屬性決策的問題。Xu (2007)再針對權重訊息不完整時的多屬性決策問題，建立優化模型，並延伸模型到區間直覺模糊訊息。Wang et al. (2007)使用幾何的方式來說明IFS，並引入正負理想點的概念，提出一個新的直覺模糊多屬性決策方法。Lin et al. (2008)在IFS上引入TOPSIS的概念，並且發展一個新的數學方法來解決直覺模糊訊息的

多屬性群體決策問題。

由此可知，直覺模糊理論已深刻的融入各項的多屬性決策議題。因此本研究主要是以直覺模糊集合為基礎，發展直覺模糊排列評估法(Intuitionistic fuzzy permutation method)，並將之應用在多屬性的決策問題上，為多屬性決策領域提供另一種分析方法。Paelinch (1976)所提出的排列評估法是將所有替選方案的優先順序排列，並對各排列順序求算其一致性與不一致性的評分，再得到各排列方式的指標值，選擇最高的指標值所代表的排列順序，以決定出最適方案。本研究以直覺模糊集合為基礎延伸排列評估法，方法中所需取得的資料性質若為基數的資料(Cardinal data)，為一清晰的數值，可直接利用直覺模糊排列評估法進行運算。相反地，當無法獲得決策矩陣完整的資料，甚至只有部分的排序資料(Ordinal data)時，我們利用兩個函數將序列資料轉成直覺模糊資料，使得不完整的排序資料能夠為決策矩陣所用，再進一步以直覺模糊排列評估法運算其結果。本研究將以模擬實驗的方式探討當投入的資料型態分別為基數資料或是排序資料時，直覺模糊排列評估法計算結果之差異性。

實驗分析使用四項指標討論兩種情況的差異程度，分別以計算斯皮爾曼等級相關(Spearman rank order correlation)、一致率(Consistency rate)、矛盾率(Contradiction rate)和反轉率(Inversion rate)觀察實驗結果的一致性與變異性。一致率為判斷兩種方案順序是否完全一致，矛盾率將比較兩個決策矩陣的最佳解是否一致，反轉率則是檢驗是否有一個方案同時落在較優解及較劣解，以驗證本研究決策方法若給定排序資料之適用性。

2. 方法論

本研究旨在發展適用於多屬性決策分析之直覺模糊排列評估法，以下分別針對多屬性決策與定義、直覺模糊集合與定義、以及直覺模糊排列評估法等相關方法論內容進行說明，最後並以一數值例說明直覺模糊排列評估法之運算過程。

2.1 多屬性決策與定義

一般處理多決策問題時，決策者需要考量之要素，包括層面(aspect)、目標(objective)、準則(criteria)、所有可能的方案(alternatives)。當決策者面對任何決策時，通常會面對多個層面，多種目標、以及多個方案及參與者，而面對多種利害關係，決策者會存在許多衝突與矛盾。多屬性決策分析之方法即被發展用以解決上述之多屬性決策問題。Hwang and Yoon (1981)認為多準則決策(Multiple criteria decision making, MCDM)可區分成兩類：多屬性決策(Multiple attribute decision making, MADM)及多目標決策(Multiple objective decision making, MODM)。前者主要應用於評估面，通常包含有限個可行方案，並從中選擇其最佳方案；而後者主要應用在規劃設計面，通常為探討不同限制之下如何追求多個目標的達成，找出最佳解集合。而本研究著重於以評估面為主的多屬性決策方法。

多屬性決策起源於有效向量的觀念(Koopmans, 1960)，依照決策者提供的資訊可將多屬性決策分成三大類：無法獲得決策者的資訊偏好；可獲得決策者對環境的偏好資訊，以及可獲得決策者對屬性的偏好設定。目前，多屬性決策已擴展至模糊決策環境中，經常運用在多個替選方案中選出最具偏好的選擇，這些選擇其特點為多重的，同時具有相互衝突、模糊的屬性特質(Anderson et al., 2002)。

在眾多的多屬性決策方法中，主要可將決策模型分為兩類：以價值效用為基礎的方法及本研究探討的優勢排序法(Lahdelma et al., 2000)。前者包含多屬性效用屬性理論(MAUT)，層級程序法(AHP)，資料包絡法(DEA)等；後者則為 ELECTRE(Elimination et Choice Translation Reality)，PROMETHEE(Preference Ranking Organization Method for Enrichment Evaluations)，TOPSIS(Technique for Order Preference by Similarity to Ideal Solution)，VIKOR(VlseKriterijumska Optimizacija I Kompromisno Resenje)及灰關聯等。優勢排序法其優點在於不同於其他方法須運用複雜的方式計算方案評價，主要以二元關係式組成，採取儘可能地簡化無法比較的方案數，使計算過程公平，直接得出方案的優劣順序，並且提供最終的方案建議(Roy and Vanderpooten, 1996)。

2.2 直覺模糊集合與定義

多屬性決策問題通常由含糊且不明確的資料建構而成，個體的偏好評定通常是模糊且無法直接透過簡單數值表示，因此，Zadeh(1965)提出模糊集合理論，數十年來已成功運用在許多不同領域(Deschrijver and Kerre, 2007)。模糊集合最主要的特徵在於有隸屬程度(Membership degree)與非隸屬程度(Non-membership degree)，隸屬程度是每一個元素隸屬於該集合的程度，範圍介在零到一之間，非隸屬程度為一減去隸屬程度，兩程度的界定賦予了不精確性模糊概念的確立。但這單一數值無法告訴我們游移不定程度，在實際運用時，決策者對於模糊概念及隸屬度可能是不完整的，隸屬度與非隸屬度的總和可能會少於1 (Liu and Wang, 2007)。因此，為了解決此種情況，Atanassov (1986)延伸模糊集合，發展了直覺模糊集合，以模糊集合為基礎構建一個普遍化的概念。主要將二值邏輯中非0即1的觀念轉換成模糊集合中[0,1]區間中的一個值，並結合模糊集合的觀念，將模糊集合中[0,1]區間中的一個值，擴展為有範圍觀念的區間值，直覺模糊的定義介紹如(1)所示。

令 E 為一固定論域，A 為在 E 上的一個直覺模糊集合(Atanassov, 1986)：

$$A=\left\{\left\langle x,\mu_A(x),\nu_A(x)\right\rangle \middle| x\in E\right\} \tag{1}$$

在所有元素 $x\in E$ 中，$\mu_A:E\to[0,1]$ 和 $\nu_A:E\to[0,1]$ 分別代表 A 集合的隸屬程度與非隸屬程度，並對 A 上的所有 $x\in E$，$0\le\mu_A(x)+\nu_A(x)\le 1$ 皆成立。

對於 E 中的每個直覺模糊集合子集，稱 $\pi_A(x)=1-\mu_A(x)-\nu_A(x)$ 為 A 中 x 的直覺指標(Intuitionistic index)，表示 x 對 A 的不確定性，或是表游移程度的一種測度(Szmidt and Kacprzyk, 2000)。因此，對於所有 $x\in E$ 中，$0\le\pi_A(x)\le 1$，且對於 E 中的任一普通模糊子集合 A，$\pi_A(x)=1-\mu_A(x)-\left[1-\mu_A(x)\right]=0$，$\forall x\in E$。

2.3 直覺模糊排列評估法

直覺模糊排列評估法乃以排列評估法為基礎，利用直覺模糊集合中的隸屬度(μ)、非隸屬度(v)、不確定程度(π)，表現各方案於多重屬性上的績效程度，並以模糊集合的屬性取代原本的清晰的資料來進行運算。直覺模糊排列評估法包括了方案 $A_i\ (i=1,2,\ldots,m)$ 以及屬性 $X_j(j=1,2,\ldots,n)$，並給予每個屬性一個權重值 $w_j(j=1,2,\ldots,n)$，$w_j \in [0,1]$，$\sum_{j=1}^{n} w_j = 1$，其決策矩陣 D 如(2)、(3)及(4)所示：

$$D = \begin{array}{c} \\ A_1 \\ \vdots \\ A_m \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} x_1 & \cdots & x_n \end{array} \\ \begin{pmatrix} (\mu_{11}, \nu_{11}, \pi_{11}) & \cdots & (\mu_{1n}, \nu_{1n}, \pi_{1n}) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ (\mu_{m1}, \nu_{m1}, \pi_{m1}) & \cdots & (\mu_{mn}, \nu_{mn}, \pi_{mn}) \end{pmatrix} \end{array} \tag{2}$$

$$(\mu_{ij}, \nu_{ij}, \pi_{ij}) \quad i = 1, 2, ..., n, \ \ j = 1, 2, ..., m \tag{3}$$

$$\mu_{ij} + \nu_{ij} + \pi_{ij} = 1 \tag{4}$$

當有 m 個方案時，會產生 $m!$組的排列組合，在方案排列的部份以 P_i 表示(P_i, i=1,2, ...,m!)。若要進行方案間(A_k與A_l)的優劣比較時，將使用隸屬度以及非隸屬度作比較運算，如公式(5)、(6)及(7)所示(Bustince and Burillo, 1996)：

$$A_k \geq A_l \text{ 若且唯若 } \mu_{A_k}(x_j) \geq \mu_{A_l}(x_j) \ \text{ and } \ \nu_{A_k}(x_j) \leq \nu_{A_l}(x_j) \ \text{ for all } \ x_j \in X \tag{5}$$

$$A_k \succeq A_l \text{ 若且唯若 } \mu_{A_k}(x_j) \geq \mu_{A_l}(x_j) \ \text{ and } \ \nu_{A_k}(x_j) \geq \nu_{A_l}(x_j) \ \text{ for all } \ x_j \in X \tag{6}$$

$$A_k = A_l \text{ 若且唯若 } \mu_{A_k}(x_j) = \mu_{A_l}(x_j) \ \text{ and } \ \nu_{A_k}(x_j) = \nu_{A_l}(x_j) \ \text{ for all } \ x_j \in X \tag{7}$$

若 $A_k \geq A_l$，則代表 $\mu_{A_k}(x_j) \geq \mu_{A_l}(x_j)$ and $\nu_{A_k}(x_j) \leq \nu_{A_l}(x_j)$，此時可得到一個正的權重值 w_j；如果 $A_k \succeq A_l$，則代表 $\mu_{A_k}(x_j) \geq \mu_{A_l}(x_j)$ and $\nu_{A_k}(x_j) \geq \nu_{A_l}(x_j)$，此時可得到一個正的權重值 0.5 w_j。此外，若有 i 組方案排列，表示方法為：$P_i = (..., A_k, ..., A_l, ...)\ i = 1, 2, ..., m!$，所列出的方案排列需要依序來計算屬性權重，以 R_i 代表符合 P_i 方案排列順序的各屬性權重值的總和，當 m!個 R_i 值都計算出來後，取 R_i 值最大的 P_i 方案順序，即為欲求之最佳解。R_i 的計算公式如(8)-(12)所示：

$$R_i = \sum_{j \in C_{kl}} w_j + \sum_{j \in C'_{kl}} \frac{1}{2} w_j - \sum_{j \in D_{kl}} w_j - \sum_{j \in D'_{kl}} \frac{1}{2} w_j \qquad i = 1, 2, ..., m! \tag{8}$$

$$C_{kl} = \{ j \mid A_k \geq A_l \}, \qquad k, l = 1, 2, ..., m, \ k \neq l \tag{9}$$

$$C'_{kl} = \{ j \mid A_k \succeq A_l \}, \qquad k, l = 1, 2, ..., m, \ k \neq l \tag{10}$$

$$D_{kl} = \{ j \mid A_k \leq A_l \}, \qquad k, l = 1, 2, ..., m, \ k \neq l \tag{11}$$

$$D'_{kl} = \{ j \mid A_k \preceq A_l \}, \qquad k, l = 1, 2, ..., m, \ k \neq l \tag{12}$$

其中，C_{kl} 為一致順序集合(Concordance set)，表示所有 $A_k \geq A_l$ 的子集合，C'_{kl} 則為所有 $A_k \succeq A_l$ 的子集合；D_{kl} 為不一致順序集合(Discordance set)，表示所有 $A_k \leq A_l$ 的子集合，D'_{kl} 則是所有 $A_k \preceq A_l$ 的子集合。上述子集合共分成四種：

(1) C_{kl} 是所有 $A_k \geq A_l$ 的子集合，稱為強一致順序集合。

(2) C'_{kl} 是所有 $A_k \succeq A_l$ 的子集合，稱為弱一致順序集合。

(3) D_{kl} 則是所有 $A_k \leq A_l$ 的子集合，稱為不一致順序集合。

(4) D'_{kl} 則是所有 $A_k \preceq A_l$ 的子集合，稱為弱不一致順序集合。

2.4 直覺模糊排列評估法數值例說明

假設決策矩陣 D 的方案個數為 4，$A_i\ (i=1,2,3,4)$，屬性個數為 5，$x_j\ (j=1,2,3,4,5)$，各屬性的權重給定為 w=(0.243, 0.285, 0.140, 0.124, 0.208)，決策矩陣如(13)所示。

$$D=\begin{array}{c} \\ A_1 \\ A_2 \\ A_3 \\ A_4 \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 \end{array} \\ \begin{pmatrix} (0.146,0.186) & (0.274,0.052) & (0.214,0.500) & (0.423,0.246) & (0.481,0.435) \\ (0.671,0.042) & (0.478,0.234) & (0.376,0.295) & (0.671,0.248) & (0.248,0.452) \\ (0.004,0.721) & (0.174,0.510) & (0.650,0.248) & (0.621,0.115) & (0.840,0.035) \\ (0.052,0.425) & (0.644,0.208) & (0.484,0.317) & (0.845,0.050) & (0.128,0.632) \end{pmatrix} \end{array} \tag{13}$$

已知共有 24(=4!)組的方案排列需要計算，以 P_1 為例，$P_1=(A_1,A_2,A_3,A_4)$，當使用直覺模糊排列評估法計算其中一組方案排列時，P_1 的結果如矩陣(14)所示：

$$C_1=\begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{cccc} 1 & 2 & 3 & 4 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0 & 0.2080 & 0.5280 & 0.4510 \\ 0.5875 & 0 & 0.5900 & 0.4510 \\ 0.4720 & 0.3480 & 0 & 0.3480 \\ 0.4065 & 0.4790 & 0.6250 & 0 \end{bmatrix} \end{array} \tag{14}$$

其中，因為 $\mu_{33}(=0.650) \geq \mu_{13}(=0.214)\ \text{and}\ \nu_{33}(=0.248) \leq \nu_{13}(=0.500)$，給予 w_3(=0.1400)的值。又因 $\mu_{34}(=0.621) \geq \mu_{14}(=0.423)\ \text{and}\ \nu_{34}(=0.115) \leq \nu_{14}(=0.246)$，給予 w_4(=0.1240)的值。最後因 $\mu_{35}(=0.840) \geq \mu_{15}(=0.481)\ \text{and}\ \nu_{35}(=0.035) \leq \nu_{15}(=0.435)$，給予 w_5(=0.2080)的值。因此得到 $c_{31}=\sum_{j\in C_{31}} w_j = w_3+w_4+w_5 = 0.140+0.124+0.208=0.472$。

在 R_1 的部分，$R_1=\sum_{j\in C_{31}} w_j - \sum_{j\in D_{31}} w_j = 2.5760-2.2875=0.2885$，

$\sum_{j\in C} w_j = c_{12}+c_{13}+c_{14}+c_{23}+c_{24}+c_{34}$，等於矩陣 C_I 中的上三角形部份的總合；

$\sum_{j\in D} w_j = c_{21}+c_{31}+c_{32}+c_{41}+c_{42}+c_{43}$，等於矩陣 C_I 中的下三角形部份的總合。

在重複進行相同的步驟之後，24 個矩陣 C_i 可以計算出各自的 R_i，R 代表 24 個 R_i 的集合，結果如下：

$$R=\begin{Bmatrix} R_1=0.2885 & R_2=0.1770 & R_3=0.7910 & R_4=0.7350 & R_5=0.2950 & R_6=0.1890 \\ R_7=0.3900 & R_8=0.9980 & R_9=0.2780 & R_{10}=0.1890 & R_{11}=0.7350 & R_{12}=0.8470 \\ R_{13}=0.9650 & R_{14}=0.9090 & R_{15}=0.2060 & R_{16}=0.2950 & R_{17}=0.9960 & R_{18}=0.2390 \\ R_{19}=0.2060 & R_{20}=0.2780 & R_{21}=0.9650 & R_{22}=0.8530 & R_{23}=0.3900 & R_{24}=0.3690 \end{Bmatrix}$$

集合 R 中因 R_8=0.9980 為最大值，所以最佳方案選擇的順序結果為 $P_8=(A_2,A_1,A_4,A_3)$。

3. 實驗分析

上述的直覺模糊排列評估法建構於當決策矩陣為直覺模糊集合的資料，屬於一種基數型態的資料(Cardinal data)，不過在實際調查狀況常會發現，並非每位受訪者皆能夠針對每個方案在各個屬性下的表現給予數值以進行評分，不過卻能在給定的屬性下對方案進行優劣的排序，而給予排序資料(Ordinal data)。本研究利用兩個函數將排序資料做轉換以便形成一個簡化的決策矩陣再進行接續的計算，矩陣中的數值依然為直覺模糊集合，但不如基數資料來得精確。本研究將以一個實驗分析觀察直覺模糊排列評估法分別運算基數資料與排序資料後的結果，期望未簡化矩陣(基數資料)與簡化矩陣(轉換後的排序資料)經由直覺模糊排列評估法的計算，其結果可呈現高度相關，以便日後在進行矩陣的排序評估時，可以利用簡化序列資料後的決策矩陣來取代原始的 IFS 矩陣。

3.1 簡化決策矩陣的方法

除了基本的方案評估方法外，直覺模糊排序評估法可使用在具順序的方案。假設決策者只給定方案的每個屬性排列順序，進一步如要知道屬性相關間的重要性，就必須由直覺模糊資料、或是基數的權重來決定。因此，直覺模糊排序評估法的特點在於資料要求的限制，決策者已無必要規範決策矩陣中的屬性性質。

有一個簡單的方法可以轉換屬性排列值為直覺模糊資料，此方法相似於 Grzegorzewski 於 2004 年所提出的方式，使用計算方案其數值確實劣於(不包括等於關係)和確實優於(不包括等於關係)特定方案。本研究主要強調點為此方法允許順序資料的不完整，並非所有方案的各個屬性皆可以被排列出順序。因此，考慮到資料遺失或是屬性無法比較的情況，本研究定義出兩個函數：$\alpha_j(A_i)$ 和 $\beta_j(A_i)$，其中，$\alpha_j(A_i)$ 表 $A_1,A_2,\ldots,\ A_{i-1},A_{i+1},A_{i+2},\ldots,A_m$ 確實劣於 A_i 的個數；$\beta_j(A_i)$ 則表示確實優於 A_i 的個數。隸屬程度與非隸屬程度分別定義如(15)與(16)。此外，當發生在決策者分配超過一個以上的方案順序一致，或一些方案無法和其他方案比較時，會發生(17)的情況。舉例來說，在直覺模糊決策矩陣 D 中，屬性偏好為弱一致 $C_{kl}^{'}$ 或弱不一致 $D_{kl}^{'}$ 皆屬於無法比較的關係。

$$\mu_{A_i}(x_j)=\frac{\alpha_j(A_i)}{m-1} \tag{15}$$

$$\nu_{A_i}(x_j)=\frac{\beta_j(A_i)}{m-1} \tag{16}$$

$$\alpha_j(A_i)+\beta_j(A_i)<m-1 \quad (假設：\pi_{A_i}(x_j)>0) \tag{17}$$

3.2 簡化決策矩陣的數值例說明

假設決策矩陣的方案個數為 4，$A_i\ (i=1,2,3,4)$，屬性個數為 5，$x_j\ (j=1,2,3,4,5)$，各屬性的權重給訂為 w=(0.2430, 0.2850, 0.1400, 0.1240, 0.2080)，決策矩陣如(18)所示。

$$D=\begin{array}{c} \\ A_1 \\ A_2 \\ A_3 \\ A_4 \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} \quad x_1 \quad & \quad x_2 \quad & \quad x_3 \quad & \quad x_4 \quad & \quad x_5 \quad \end{array} \\ \begin{pmatrix} (0.146,0.186) & (0.274,0.052) & (0.214,0.500) & (0.423,0.246) & (0.481,0.435) \\ (0.671,0.042) & (0.478,0.234) & (0.376,0.295) & (0.671,0.248) & (0.248,0.452) \\ (0.004,0.721) & (0.174,0.510) & (0.650,0.248) & (0.621,0.115) & (0.840,0.035) \\ (0.052,0.425) & (0.644,0.208) & (0.484,0.317) & (0.845,0.050) & (0.128,0.632) \end{pmatrix} \end{array} \tag{18}$$

以下以 x_1 屬性為說明例以完成決策矩陣簡化的動作：

(1) 由 D 矩陣 x_1 屬性可得知，$\mu_1(=0.146)\le\mu_2(=0.671)$ and $\nu_1(=0.186)\ge\nu_2(=0.042)$，因此 $A_1\le A_2$；$\mu_1(=0.146)\ge\mu_3(=0.004)$ and $\nu_1(=0.186)\le\nu_3(=0.721)$，因此 $A_1\ge A_3$；$\mu_1(=0.146)\ge\mu_4(=0.052)$ and $\nu_1(=0.186)\le\nu_4(=0.425)$，$A_1\ge A_4$。最後可得在屬性 x_1 中劣於 A_1 的筆數為 2，優於 A_1 的筆數為 1，無法判定的筆數為 0，則 $\mu_1'=\frac{2}{3},\nu_1'=\frac{1}{3},\pi_1'=\frac{0}{3}$。

(2) 由 D 矩陣 x_1 屬性可得知，$\mu_2(=0.671)\ge\mu_1(=0.146)$ and $\nu_2(=0.042)\le\nu_1(=0.186)$，因此 $A_2\ge A_1$；$\mu_2(=0.671)\ge\mu_3(=0.004)$ and $\nu_2(=0.042)\le\nu_3(=0.721)$，$A_2\ge A_3$；$\mu_2(=0.671)\ge\mu_4(=0.052)$ and $\nu_2(=0.042)\le\nu_4(=0.425)$，$A_2\ge A_4$。最後可得在屬性 x_1 中劣於 A_2 的筆數為 3，優於 A_2 的筆數為 0，無法判定的筆數為 0，則 $\mu_2'=\frac{3}{3},\nu_2'=\frac{0}{3},\pi_2'=\frac{0}{3}$。

(3) 由 D 矩陣 x_1 屬性可得知，$\mu_3(=0.004)\le\mu_1(=0.146)$ and $\nu_3(=0.721)\ge\nu_1(=0.186)$，因此 $A_3\le A_1$；$\mu_3(=0.004)\le\mu_2(=0.671)$ and $\nu_3(=0.721)\ge\nu_2(=0.042)$，$A_3\le A_2$；$\mu_3(=0.004)\le\mu_4(=0.052)$ and $\nu_3(=0.721)\ge\nu_4(=0.425)$，$A_3\le A_4$。最後可得在屬性 x_1 中劣於 A_3 的筆數為 0，優於 A_3 的筆數為 3，無法判定的筆數為 0，則 $\mu_3'=\frac{0}{3},\nu_3'=\frac{3}{3},\pi_3'=\frac{0}{3}$。

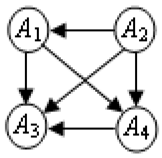
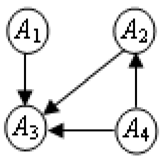
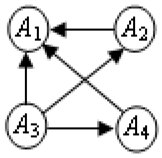
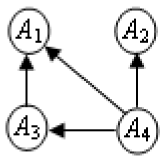
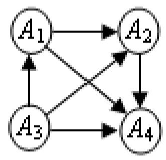
(4) 由 D 矩陣 x_1 屬性可得知，$\mu_4(=0.052)\le\mu_1(=0.146)$ and $\nu_4(=0.425)\ge\nu_1(=0.186)$，因此 $A_4\le A_1$；$\mu_4(=0.052)\le\mu_2(=0.671)$ and $\nu_4(=0.425)\ge\nu_1(=0.042)$，$A_4\le A_2$；$\mu_4(=0.052)\ge\mu_3(=0.004)$ and $\nu_4(=0.425)\le\nu_3(=0.721)$，$A_4\ge A_3$。最後可得在屬性 x_1 中劣於 A_4 的筆數為 1，優於 A_4 的筆數為 2，無法判定的筆數為 0，則 $\mu_4'=\frac{1}{3},\nu_4'=\frac{2}{3},\pi_4'=\frac{0}{3}=0$。

綜合以上的計算結果，並計算其他屬性的簡化值，矩陣 D 可轉換為 $D^{'}$ 如(19)所示：

$$D^{'}=\begin{array}{c} \\ A_1 \\ A_2 \\ A_3 \\ A_4 \end{array}\begin{array}{c}\begin{array}{ccccc} x_1 & \qquad\qquad x_2 & \qquad\qquad x_3 & \qquad\qquad x_4 & \qquad\qquad x_5 \end{array}\\ \begin{pmatrix} (0.667,0.333) & (0.333,0.000) & (0.000,1.000) & (0.000,0.667) & (0.667,0.333) \\ (1.000,0.000) & (0.333,0.333) & (0.333,0.333) & (0.000,0.333) & (0.333,0.667) \\ (0.000,1.000) & (0.000,1.000) & (1.000,0.000) & (0.333,0.333) & (1.000,0.000) \\ (0.333,0.667) & (0.667,0.000) & (0.333,0.333) & (1.000,0.000) & (0.000,1.000) \end{pmatrix}\end{array} \tag{19}$$

藉由以上的決策矩陣，我們可利用 2.3 小節所介紹的直覺模糊排列評估法進行運算，以求得最佳的方案排列順序。在此要特別強調的是，本研究為了要比較基數資料與排序資料於直覺模糊排列評估法運算後的結果，因此簡化矩陣(19)中的數值是原始的基數資料矩陣(13)所轉換而來的，但實務上，簡化矩陣中的數值應該由表 1 所示的排序資料轉換而成，而表 1 中方案的排序關係為式(13)決策矩陣數值所構成，一般而言，排序資料所包含的資訊較少，方案間的比較也可以是不完整的呈現狀態。接下來本研究將用一個模擬實驗的方式比較當直覺模糊排列評估法運算的資料集為基數資料或排序資料時，其最後方案的排序結果是否有差異。

表 1 排序資料關係表

屬性	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
排序關係	$A_1>A_3$ $A_1>A_4$ $A_2>A_1$ $A_2>A_3$ $A_2>A_4$ $A_4>A_3$	$A_1>A_3$ $A_2>A_3$ $A_4>A_2$ $A_4>A_3$	$A_2>A_1$ $A_3>A_1$ $A_3>A_2$ $A_3>A_4$ $A_4>A_1$	$A_3>A_1$ $A_4>A_1$ $A_4>A_2$ $A_4>A_3$	$A_1>A_2$ $A_1>A_4$ $A_2>A_4$ $A_3>A_1$ $A_3>A_2$ $A_3>A_4$
關係圖					

3.3 比較指標的介紹

(1) 等級相關係數：若計算出來的等級相關係數很高，表示簡化後的矩陣並不會喪失太多的資訊量，也就是說經過簡化程序後的排序與簡化前的排序必須具有一致性，因此本研究可以使用簡化後的矩陣資料。

(a)等級相關係數的平均數：計算兩個決策矩陣的結果是否相近（一致性）。

(b)等級相關係數的標準差：主要為觀察兩矩陣間變異性的大小。

(2) 一致率(Consistency rate)：也就是檢驗兩種方案的順序是否完全一致。決策者會選擇排序第一的方案解，為最適的方案解。對於排序第二、第三甚至是之後的方案解，決策者通常不去理會。除非是程序發生了變化以致於第一個方案解不可行，所以本研究要探討的為簡化前後的方案順序是否一致。

(3) 矛盾率(Contradiction rate)：由於在決策過程中，決策者選擇的大多為最佳的方案解，因此將比較兩個決策矩陣的最適解是否一致。但是在實際的狀況中，決策會受到相關單位或利益團體的影響，因此若無法選擇最適的方案解，決策者可以選擇次佳的方案解或是排序第三的方案解。

(4) 反轉率(Inversion rate)：將決策方案分為前後兩個部份，前面的部份代表較優解，後面的部份代表較劣解，計算兩個決策矩陣所求的解，是否有一個方案同時落在較優解以及較劣解。以驗證本研究所提出決策方法的實用性。

4. 實驗結果

本研究使用模擬資料來進行驗證，模擬資料包括一個使用直覺模糊集合的決策矩陣及其屬性之權重。在方案數部份將有 8 個 A_m，而個屬性部份有 8 個 X_n，因此總共會產生 $m \times n$ (=8×8=64)種不同大小的矩陣。每個矩陣種類將會以 matlab 亂數產生 1,000 筆模擬資料，以避免資料的歧異性。以下為模擬實驗結果。

圖 1 為一致率之折線圖，從圖中可以看出一致率隨著方案個數的增加，從 0.7 一路降低至幾乎等於 0，代表當方案個數上升時，簡化前後的兩個決策矩陣所計算出來的結果，完全相同的比例將會越來越低。當方案個數小於 4，完全相同的比例將會大於 0.5，所以我們可以進行簡化的程序。一致率隨著方案個數的不同，其曲線會有明顯的變化，但是當方案個數不變之下，而屬性個數增加時，完全相同的比例變化並不明顯。方案個數為 3 之時，其數值接近 0.7，為一致率最高的時候。而當方案個數為 10 的時候，一致率大約只有 0.23，為一致率最低的時候。

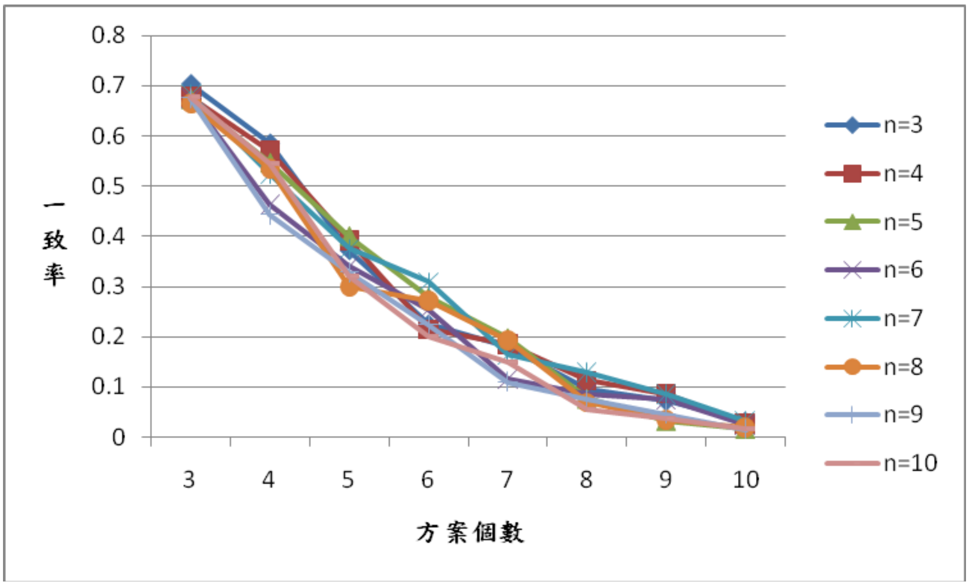


圖 1 一致率折線圖

圖 2 為矛盾率之折線圖，從圖中可以看出矛盾率隨著方案個數的增加，從 0.13 一直上升至 0.24。代表當方案個數上升時，兩決策矩陣計算出來之最佳方案的解，有相當大的差異。但是當方案個數小於 6 時，矛盾率大致上將會降低至 0.2 以下。當方案個數不變，而屬性個數增加時，矛盾率的變化沒有明顯的趨勢。方案個數為 3 之時，其數值接近 0.24，為矛盾率最高的時候。而當方案個數為 10 的時候，矛盾率大約只有 0.14，為矛盾率最低的時候。而且可以從折線圖觀察出當屬性個數為 7 與屬性個數為 10 時，其矛盾率之折線有不規則的現象發生。但是在大致上，矛盾率之折線圖仍呈現出緩慢上升的趨勢。

圖 3 為反轉率之折線圖，從圖中可以看出反轉率隨著方案個數的增加，從 0.20 一路上升至 0.60，代表當方案個數上升時，簡化前後的兩個決策矩陣計算出來的結果，在較佳解與較劣解中，反轉的情況有上升的趨勢。但是當方案個數小於 8 時，反轉率將會降低至 0.5 以下。而當方案個數不變，屬性個數增加時，反轉率之間的變化並不明顯。方案個數為 10 之時，其數值接近 0.56，為反轉率最高的時候。而當方案個數為 3 的時候，反轉率大約只有 0.21，為反轉率最低的時候。由下圖我們可以觀察到，其反轉率之折線圖呈現規律上升的趨勢。

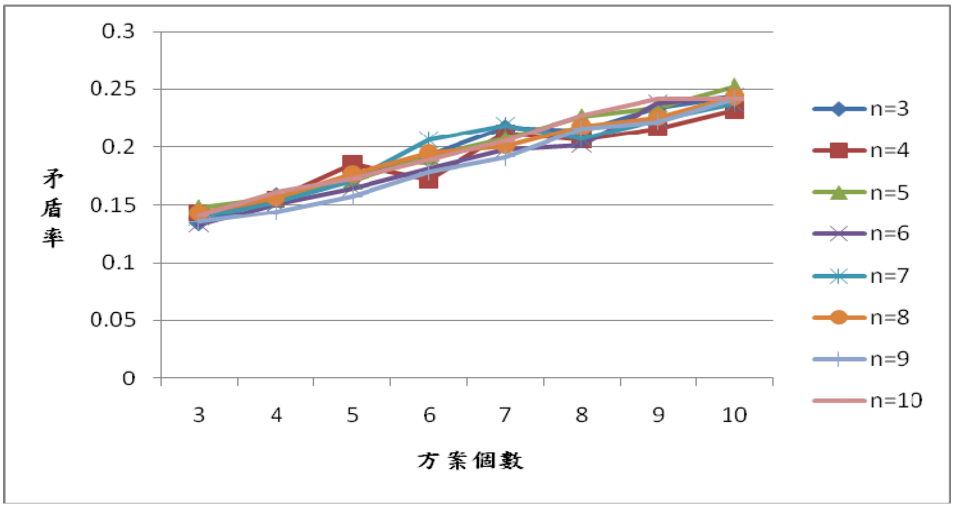


圖 2 矛盾率折線圖

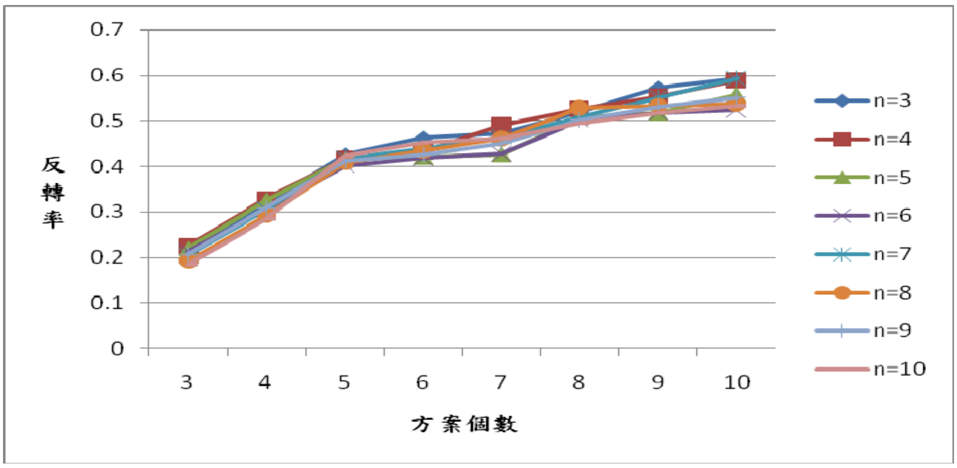


圖 3 反轉率折線圖

表 2 為簡化決策矩陣與未簡化決策矩陣兩者之等級相關係數平均數與標準值表，如圖 4 及圖 5 所示。圖 4 表現出等級相關係數平均值的曲面圖，從圖中可以看出隨著方案個數的增加，平均值的部分有明顯上升的趨勢，從 0.8 逐漸上升至 0.9。最高點發生在方案個數為 10，屬性個數為 8 的時候，其等級相關係數平均值為 0.9140。而最低點發生在方案個數為 3，屬性個數為 8 的時候，其等級相關係數平均值為 0.8105。但是當方案個數不變，而屬性個數增加時，其平均值與標準差並沒有觀察出明顯的趨勢。我們由圖中可以觀察出這張曲面圖呈現出明顯的不規則起伏，在方案個數 3 上升至方案個數 4，平均值上升的幅度頗大。除此之外，平均值的部分都呈現逐漸上升的情形，而在標準差的部分，當方案數大於 3 之後，標準差就大致降至 0.2 以下。

表 2 等級相關係數平均數與標準值表

方案個數	屬性個數							
	3	4	5	6	7	8	9	10
3	0.8455	0.8310	0.8395	0.8300	0.8265	0.8105	0.8150	0.8140
	(0.3248)	(0.3253)	(0.2932)	(0.2837)	(0.3126)	(0.2966)	(0.3018)	(0.3248)
4	0.8610	0.8672	0.8670	0.8635	0.8646	0.8542	0.8508	0.8522
	(0.2145)	(0.2336)	(0.2012)	(0.1991)	(0.2126)	(0.2255)	(0.1971)	(0.2100)
5	0.8690	0.8720	0.8745	0.8620	0.8635	0.8685	0.8755	0.8720
	(0.1850)	(0.1829)	(0.1981)	(0.1824)	(0.1917)	(0.1893)	(0.1812)	(0.1702)
6	0.8720	0.8640	0.8849	0.8817	0.8917	0.8886	0.8860	0.8869
	(0.1664)	(0.1749)	(0.1717)	(0.1611)	(0.1713)	(0.1578)	(0.1586)	(0.1813)
7	0.8964	0.8914	0.8836	0.8914	0.8807	0.8829	0.8843	0.8793
	(0.1564)	(0.1393)	(0.1635)	(0.1631)	(0.1640)	(0.1439)	(0.1453)	(0.1569)
8	0.8840	0.8900	0.8980	0.8940	0.8800	0.8960	0.8960	0.8940
	(0.1453)	(0.1205)	(0.1446)	(0.1425)	(0.1333)	(0.1243)	(0.1327)	(0.1360)
9	0.8848	0.8908	0.8952	0.8964	0.8944	0.8976	0.8936	0.9012
	(0.1005)	(0.1075)	(0.1308)	(0.1263)	(0.1251)	(0.1139)	(0.1027)	(0.1111)
10	0.8900	0.8990	0.8940	0.9020	0.8920	0.9140	0.9130	0.9010
	(0.0923)	(0.0752)	(0.1065)	(0.1037)	(0.0872)	(0.0849)	(0.0838)	(0.0863)

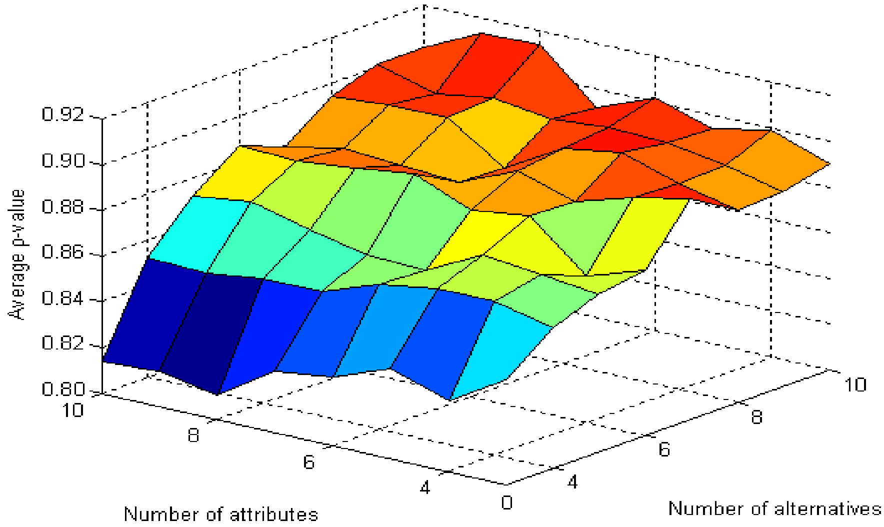


圖 4 等級相關係數平均值曲面圖

圖 5 為等級相關係數標準差的折線圖，從圖中可以看出隨著方案個數的增加，標準差的部分呈現出明顯下降的情形，從 0.33 下降至 0.08，代表隨著方案個數增加時，兩決策矩陣計算出來的結果間變異性降低了。但是當方案數大於 4 之後，標準差就會降低至 0.2 之下。而當方案個數不變，屬性個數增加時，等級相關係數標準差並沒有明顯的變化。方案個數為 3 之時，其數值接近 0.31，為等級相關係數標準差最高的時候。而當方案個數為 10 的時候，標準差大約只有 0.09，為等級相關係數標準差最低的時候。

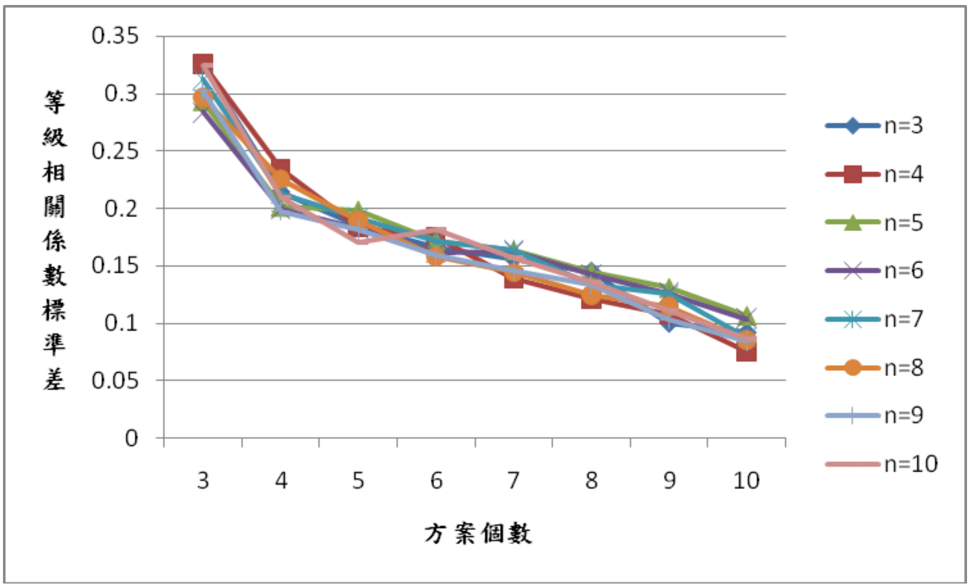


圖 5 等級相關係數標準差折線圖

5. 結論

本研究以直覺模糊集合的概念，以及排序評估法來建構出一套直覺模糊排列的評估模式，並依據模擬實驗的分析及驗證，提出研究之結論，歸納四點如下，作為研究者及讀者日後之參考。

1. 本研究提出直覺模糊集合與排列評估法的決策方法，並簡化排列評估法資料的取得，可以直接使用序列資料，再將其轉換為直覺模糊集合，以進行決策的運算。
2. 本研究透過直覺模糊集合的特性，解決資料中不確定性的問題，將不確定性資料以直覺模糊集合的 π 值取代，再進行排列評估法的運算，使得決策者在決策的過程中能同時考量到不確定性資料。
3. 本研究以模擬實驗為分析，進行模擬資料的驗證，經由斯皮爾曼等級相關分析的計算，以及計算方案順序的一致率，矛盾率，最後計算反轉率。由實驗的結果可以發現，簡化前後的兩個矩陣，在計算所得的結果是相近的，等級相關係數值在 0.8 以上，由此可知本研究所提出的直覺模糊排列評估法在簡化排列評估法的取得資料後，仍具有很高的可信度，亦證明了本研究方法的可行性。
4. 由實驗結果可以驗證出，當所需要的決策方案個數增加後，轉換前後的決策矩陣運算結果會越趨於一致，等級相關係數的平均值越高且標準差越低。

本研究最主要的貢獻即提出直覺模糊排列評估法，不僅可計算基數的資料型態亦可處理排序的資料型態，而模擬實驗的數值分析則是提供兩種方法的差異程度，四項指標皆指出兩者所得到的結果相似，因此未來執行多屬性的問卷調查，若考量到調查時的方便性，受訪者只需要給予方便且容易的排序資料，而不需要再對各方案在各屬性上的表現逐一評分，藉由排序資料轉換的簡化矩陣，即可計算出最佳的方案排列順序。

參考文獻

1. Anderson, D. R., D. J. Sweeney & A. W. Thomas (2002), *An Introduction to Management Science*, Boston: South-Wester Educational Publishing.
2. Atanassov, K. T. (1983), *Intuitionistic Fuzzy Sets*, Sofia: VII ITKR's Session.
3. Atanassov, K. T. (1986), "Intuitionistic Fuzzy Set," *Fuzzy Sets and Systems*, 20(1), pp.87-96.
4. Atanassov, K. T. (1999), *Intuitionistic Fuzzy Sets*, Heidelberg, New York: Physica-Verlag.
5. Atanassov, K. T., & C. Georgiev (1993), "Intuitionistic Fuzzy Prolog," *Fuzzy Sets and Systems*, 53(2), pp.121-128.
6. Bustince, H. & P. Burillo (1996), "Vague Sets Are Intuitionistic Fuzzy Sets," *Fuzzy Sets and Systems*, 79(3), pp.403-405.
7. Deschrijver, G. & E. E. Kerre (2003), "On the Relationship between Some Extensions of Fuzzy Set Theory," *Fuzzy Sets and Systems*, 133(2), pp.227-235.
8. Gau, W. L. & D. J. Buehrer (1993), "Vague Sets," *IEEE Transactions on Systems Man and Cybernetics*, 23(2), pp.610-614.
9. Grzegorzewski, P. (2004), "On Measuring Association between Preference Systems," *Proceedings of IEEE International Conference on Fuzzy Systems*, July 25-29, Budapest, Hungary, pp.133-137.
10. Hwang, C. L., & K. Yoon (1981), *Multiple Attribute Decision Making: Methods and Applications*, New York: Springer-Verlag.
11. Koopmans, T. C. (1960), "Stationary Ordinal Utility and Impatience," *Econometrica*, 28(2), pp.287-309.
12. Lahdelma, R., P. Salminen & J. Hokkanen (2000), "Using Multicriteria Methods in Environmental Planning and Management," *Environmental Management*, 26(6), pp.595-605.
13. Li, D. F. (2005), "Multiattribute Decision Making Models and Methods Using Intuitionistic Fuzzy Sets," *Journal of Computer and System Sciences*, 70(1), pp.73-85.
14. Lin, Y. H., P. C. Lee, T. P. Chang & H. I. Ting (2008), "Multi-attribute Group Decision Making Model under the Condition of Uncertain Information," *Automation in Construction*, 17(6), pp.792-797.
15. Liu, H. W. & G. J. Wang (2007), "Multicriteria Decision- making Methods Based on Intuitionistic Fuzzy Sets," *European Journal of Operational Research,* 179(3), pp.220-233.
16. Paelinck, J. H. P. (1976), "Qualiflex: a Flexible Multiple-criteria Method," *Economics Letters*, 1(3), pp.193-197.
17. Roy, B. & D. Vanderpooten (1996), "The European School of MCDA: Emergence, Basic

Features and Current Works," *Journal of Multi-criteria Decision Analysis*, 5(1), pp.22-37.

18. Szmidt, E. & J. Kacprzyk (1996), "Remarks on Some Applications of Intuitionistic Fuzzy Sets in Decision Making," *Notes on Intuitionistic Fuzzy Sets*, 2, pp.22-31.
19. Szmidt, E. & J. Kacprzyk (1998), "Group Decision Making under Intuitionistic Fuzzy Preference Relations," *Proceedings of Information Processing and Management of Uncertainty Conference*, Paris, pp.172-178.
20. Szmidt, E. & J. Kacprzyk (2000), "Distances between Intuitionistic Fuzzy Sets," *Fuzzy Sets and Systems*, 114(3), pp.505-518.
21. Szmidt, E. & J. Kacprzyk (2004), "A Concept of Similarity for Intuitionistic Fuzzy Sets and its Use in Group Decision Making," *Proceedings of International Joint Conference on Neural Networks and IEEE International Conference on Fuzzy Systems*, July 25-29, Budapest, Hungary, pp.1129-1134.
22. Wang, G. J. & Y. Y. He (2000), "Intuitionistic Fuzzy Sets and L-fuzzy Sets," *Fuzzy Sets and Systems*, 110(2), pp.271-274.
23. Wang, Y., Y. J. Lei & Y. L. Lu (2007), "Multiple Attribute Decision Making Method Based on Intuitionistic Fuzzy Sets," *Systems Engineering and Electronics,* 29(12), pp.2060-2063.
24. Xu, Z. S. (2007), "Intuitionistic Preference Relations and their Application in Group Decision Making," *Information Sciences*, 177(11), pp.2363-2379.
25. Xu, Z. S. & R. R. Yager (2006), "Some Geometric Aggregation Operators Based on Intuitionistic Fuzzy Sets," *International Journal of General Systems*, 35(4), pp.417-433.
26. Zadeh, L. A. (1965), "Fuzzy Sets," *Information and Control*, 8(3), pp.338-356.