

建構一個學習線性規劃的輔助平台

陳伊亭、邱薇諭、賴欣瑜、李佳真

南華學資訊管理系

陳仁義教授

zychen@mail.nhu.edu.tw

南華學資訊管理系

摘要

在我們學習管理數學的線性規劃之兩章中，幾何觀點的角落法以及代數觀點的單形法分別呈現出來，經由老師的細心引導，有些同學可以感覺到個別的特點和其間的關聯性，但是大部份的同學還是一知半解。因此老師鼓勵班上同學可以運用所學的資訊科技，來具體化適當的輔助學習工具，我們覺得很有興趣和具有挑戰性，因此在這個專題中來完成老師的初步構想。從幾何的觀點來瞭解角落法較為容易，我們就利用這種低維度幾何圖形的呈現，用來聯結相應維度單形法的樞紐運算和推演過程，以此為基礎再作多次的演練和解說，在呈現的幾何圖形中有了具體感覺之後，當線性規劃問題推廣到高維度的單形法之矩陣運算中，同學們就可比較容易瞭解樞紐元素的選取準則之背景因素和相關運算原理，甚至高維度的抽象思維也可建立起來，進而融會貫通。在此專題當中，我們應用資訊科技來作有效地呈現出單形法所對應的幾何圖形和其動態路徑，嘗試了多種的工具和呈現方式，最後是以一種較好的成果展現出來。

關鍵詞：線性規劃、幾何方法、單形法、資訊科技。

壹、緒論

剛開始接觸到函數、機率、矩陣等等數學問題的時候，內心深處就一直有個想法，我們所學的這些數學在生活中或是未來真的會用得到嗎？我們去外面和別人買東西最多也只用道加減乘除，函數、機率、矩陣等等應該都用不到，所以也沒有很深入去了解，只是將所學的複習到能應付考試的地步，其中的意義也沒有多想。就我們初步的瞭解，許多學生學習數理相關科目，主要是為了應付考試而學習的。至於數學最基本的原理，根本不想去理會它，只想著要如何才能拿到高分。直到上了大學，學了數學應用課程，才了解我們能夠用這些數學的方法來分析數據、並用分析出來的結果來做決策，比如說，某家公司

要生產新的 DVD 播放機，這時候我們就必須去計算出它的市場均衡，因為當價格太高時，消費者購買率會降低；反之，會降低製造商供貨的意願。因此，數理概念可應用到許多日常的決策當中。

另一方面，一個常見的最佳化問題，比如說：某間公司要製造甲、乙兩種紀念品，有 A、B 兩台機器，甲、乙兩種紀念品的利潤和使用 A、B 機器的時間都不一樣，這時候我們就能根據題目給我們的資料，列出不等式，就能利用代數方法或幾何方法來找到最佳解。線性規劃可分為幾何方法和代數方法。在利用角落法(幾何方法)的時候通常都需要畫圖，繪製出來的圖形的角落通常不只一個，這時候我們就必須要把每個角落都帶入看看哪個是最佳的

答案，角落的數量太多時所花費的時間也會較多；當然也能用電腦計算出，但是當電腦在跑角落法的時候，它並不是往特定的一邊跑，而是根據樞紐元素來選取邊。單形法是要透過矩陣才能計算得到最佳解答，在計算的過程中，我們必須要找到樞紐元素，這時候我們就要去判斷樞紐行和樞紐列。樞紐行的選取通常都是擴增矩陣的最後一列垂直線左側負最多的元素；樞紐列的選取是樞紐行的正數，除常數行的應對元素後，找出比值最小者。樞紐行和樞紐列交會的地方就是樞紐元素，找出樞紐元素後就可以開始計算最佳解。因此，一般而言，學生較無法體驗兩種方式的聯結性。在此專題中我們試圖以所學的資訊科技來具體化適當的輔助學習工具，呈現動態的幾何圖形，可使學弟妹在學習線性規畫的課題時，效率將會顯著提高。

貳、相關文獻探討

文獻回顧與探討分以下兩主要部分：
一、線性規劃求解線性目標函數的介紹。
二、線性規劃求解線性目標函數的介紹與比較：分別探討幾何方法與代數方法的單形法 (Simplex Method) 的探討。

一、線性規劃求解線性目標函數的介紹

線性規劃主要是處理「線性最佳化」(optimization) 問題，在商業或經濟等方面問題需要做決策時，為滿足各個約束條件的線性函數，來求解一組變量特定值達到線性目標函數的最大值或最小值 (方述誠，1993)。為求得最佳化的目標函數 (objective function) 時，其中如資源方面的有限，就是問題解受到的限制，這一類就是數學規劃問題 (mathematical programming problem)。而線性規劃問題 (linear programming problem) 為當目標函

數或限制式都為線性。一個線性規劃問題具有一個求函數的極大化或極小化的線性目標函數，且其隸屬的限制條件均以線性的等式或不等式來呈現 (Tan, 2009)。

二、線性規劃求解線性目標函數的方法介紹與比較

(一) 幾何方法的介紹

在幾何方法上，兩個變數的線性規劃問題較容易詮釋。例如由數個線性的限制式 (等式或不等式) 所構成的區域 S ，其區域 S 即為可行解 (feasible solution) 所在區域。利用可行解可以帶入目標函數中，尋求得極大或極小值的最佳解 (optimal solution)。

但是區域 S 的可行解有無線多個，所以要透過角落法 (method of corners)。因一線性規劃問題有解，必存在於可行集合 S 的頂點或角落點上 (corner point)。將可行集合的所有角落點 (或頂點) 座標帶入目標函數，得到最大值或最小值的點即為最佳解。如果相鄰兩角落點為最佳解，則兩點的線段都為此一線性規劃問題的無線多解。

(二) 代數方法的單形法介紹

當變數變多，主要用代數方法解決找出最大值比幾何方法較佳。George Dantzig 於 1940 年代發展出來的單形法，第一步建立初始單形表 (initial simplex tableau) 進行樞紐行 (pivot column) 與樞紐列 (pivot row) 的選取來得到樞紐元素 (pivot element)。執行樞紐運算到最後得到最終單形表 (final simplex tableau)，此表最後一列的數據即為最佳解。

(三) 幾何方法與代數方法的單形法的探討

單形法是一套反覆計算的程序，從初

始可行解(指可行集合 S 的某一個角落點，通常選擇原點)開始，每一次反覆計算試圖改善目標函數值(確定其值不會更差)，並走到可行集合 S 上的另一個角落點，如此反覆計算直至找到最佳解或得悉沒有最佳解為止(Tan, 2009)。由以上可知，單形法可以表現在幾何方法的區域 S 上。單形表上的樞紐元素選取步驟中，選擇樞紐行可以知道可行解從原點出發往 x 或 y 軸移動。然後樞紐列為選取比值較小，代表可行解從原點移動到該軸的角落點。這個移動也使目標函數值從 0，增加到該角落點帶入後所得的目標函數值。以上即為單形表的每一回合的運算，計算到最終單形表得到最後目標函數值，該解也就是最佳目標函數值。

許多教科書對計算單形法的計算相當詳細，但是卻沒有對應於幾何方法的詳細圖形連結和說明(朱蘊鑽, 2009; 吳宗正, 2009; 張純明, 2009; 薄喬萍, 2007; 黃慧鳳、陳淑賢, 2007; 楊浩二, 1986; 等)。而且單形法的計算方式多為抽象文字解說帶過，讓同學們對單形法可能較不容易明瞭其原理和造成學習上的困難，在此專題中我們試圖以所學的資訊科技來具體化適當的輔助學習工具，呈現動態的幾何圖形，可使學弟妹在學習線性規畫的課題時，效率將會顯著提高。

參、系統功能簡介

首頁點選”進入網頁”，就可以到達網站的 menu。

- (一) 單形法介紹：代數方法的單形法的簡介。
- (二) 角落法介紹：幾何方法的角落法的簡介。
- (三) 整合介紹：將幾何方法和代數方法連結在一起，將題目利用幾何方法和代數方法分別的呈現出來，讓使

用者可以得知電腦如何利用代數方法來呈現幾何方法。

- (四) 單形法：單形法的線上教學區，可以讓學生線上輸入題型練習單形法的樞紐運算並求出最佳解。
- (五) 角落法：角落法的線上教學區，可以讓學生線上輸入二元一次方程式題型，練習解聯立方程式並求出最佳解。
- (六) 整合方法：角落法的線上練習區，可以讓學生輸入數值，了解幾何法和單形法的相關性。
- (七) 解聯立方程式：使用者可以進行線上聯立方程式。
- (八) 計算公因數：使用者可以進行公因數的求解。

肆、系統特色

我們製作的這個網站是用來輔助老師教學，或是讓正在學習線性規劃的學生們能透過這個網站了解到單行法與幾何方法之間的關聯性。老師可以使用我們的網站來當作教導線性規劃時所使用的輔助教材，讓學生能更了解角落法和單形法的原理、計算，以及他們之間的相關性。學生如果有不懂得也能透過網站，更加了解線性規劃。

我們的網站分成三個部份，第一部份是幾何方法(角落法)，第二部份是代數方法(單形法)，第三部份是整合部分。可以讓學生針對他們所不了解的部份，進行學習。

我們的網站可以解聯立方程式、以及計算最大公因數的練習，在網站上也會顯示出聯立方程式的計算過程，讓學生能學習，解聯立方程式的過程。

伍、研究方法(系統開發工具與技術)

網頁設計軟體：

Visual Web Developer 2008-Asp.net C#

繪圖設計軟體：Paint.NET v2.63

網頁美工軟體：ZPaint 1.4

矩陣繪製軟體：MathType

陸、系統使用對象

為輔助老師教授及學習線性規劃的學生使用。

柒、系統使用環境

作業環境：Microsoft Windows XP/7

瀏覽器：Internet Explorer8 以上

開發環境：

Microsoft .NET Framework3.5 以上

Microsoft ASP.3.5

Microsoft Visual Web Developer 2008 Express

捌、研究結論及未來發展

(一) 研究結論

我們去查尋了許多有關數學教學的網站，但是有教關於線性規畫的網站很少，網站上也沒有清楚說明角落法和單形法之間的相關性、介紹等。透過其他使用者的操作，我們應該要加入角落法及單形法的介紹、以及計算、使用等方法，讓初學者和想學習使用線性規畫的使用者能夠充分了解線性規劃。

(二) 未來發展

我們希望透過我們的網站，讓想要學習線性規劃的使用者能更進一步了解線性規劃單形法、角落法的原理、計算、以及他們之間的關聯等。但是透過使用過網站的使用者反應，我們現在做的網站因為介紹不足的關係，讓從未接觸過線性規劃的人還是無法了解線性規劃，我們必須朝這個方向繼續努力，還有我們的整合部分還未完成，所以使用者還不能感覺到單形法

和角落法之間的關連性，這也是我們要加強的地方。

參考文獻

- 【1】S. T. Tan 著，張純明譯，「管理數學」，滄海書局，台中，2009
- 【2】方述誠著，「線性規劃」，數學傳播季刊第 17 卷，第 1 期
- 【3】Lial、Hungerford、Holcomb 著，朱蘊鑛譯，「管理數學——現代管理數學及其應用」，台灣培生教育出版股份有限公司，台北，2009
- 【4】薄喬萍著，「管理數學精要」，五南圖書出版股份有限公司，台北，2007
- 【5】黃慧鳳、陳淑賢著，「管理數學」，高利圖書有限公司，台北，2007
- 【6】楊浩二著，「線性規劃——理論與實際」，華泰圖書文物公司，台北，1986
- 【7】吳宗正著，「線型規劃——理論及應用」，華泰圖書文物公司，台北，1986
- 【8】王有禮著，「透視 ASP.NET 3.5—使用 C#」，碁峰資訊股份有限公司，台北，2009
- 【9】動態數學：<http://www.dynamath.tw/>