第三章　研究方法

在傳統的計量方法如最小平方法(OLS)或一般最小平方法(GLS)等迴歸分析法，皆假設其變數資料為定態 (stationary)，但實際上許多經濟變數的平均數及變異數均不符合定態之假設。Nelson & Plosser (1982)對於許多的總體經濟變數加以研究，並發覺大多數的變數存在非定態(nonstationary)的特性，若用傳統的迴歸方法來估計此非定態的數列，其迴歸式會造成判定係數 R^2 很高，變數之 t 統計量非常顯著，但 D－W 值很低的現象，此即為 Granger & Newbold (1974)所提出的假性迴歸(spurious regression)。

將非定態的時間數列進行差分，通常以差分後的定態時間序列進行迴歸分析，來排除假性迴歸的問題，但是差分後的資料會有喪失長期資訊的問題，以致失去了變數與變數間的長期均衡關係，直到 Granger & Engle (1987)提出共整合(cointegration)概念才解決了以上的問題。

Granger & Engle 明確指出，即使兩經濟變數為非定態的時間序列，故其線性組合也不會屬於定態數列，但仍可能存在某種經濟關係，而存在一組共整合關係；換言之，共整合允許短時間變數有各自發展的趨勢，但在長期而言，由於各變數長期移動型態相似，使其長期趨勢在某種程度上會相互抵銷，回復至均衡水準，此即共整合。本研究在進行共整合檢定之前，將先對該變數進行單根檢定，以確定是否已達定態。而單根檢定的方法也有很多，在本研究中我們採用最常用的 ADF test。

而在共整合檢定方面，最常用的計量方法主要有(1)Engle & Granger 二階段檢定法及(2)Johansen 最大概似法。本研究採用 Johansen 所提出的最大概似法，其運用最大概似估計量的概念所提出最大特徵根和軌跡檢定這兩種方法來檢定共整合關係，因為最大概似估計法可找出一組以上的共整合向量關係。

至於在因果關係及領先-落後關係方面，國內外之期貨與現貨市場的因果關係相關研究，大多數在研究方法上採用 Granger (1969)對其所定義的因果關係檢定，因此

本研究也是採用此模型來探討期貨與現貨間的領先與落後關係。

第一節　Granger 因果關係

假設有 X **與** Y **兩個變數，當對** X **做預測時，除了使用** X **過去資料所提供的資訊外，若加上** Y **過去的資料，而使得對** X **的預測更準確，則稱** Y **是** X **的因**(Y causes X)**；反之，當對** Y **做預測時，若加** X **上過去的資料，能降低** Y **的預測誤差，則稱** X **是** Y **的因；若以上兩種情況同時發生時，稱** X **與** Y **具有回饋**(Feedback)**關係。**

Granger(1969)**是從變數的預測能力來定義兩變數間的因果關係。根據** Granger **對因果關係的定義，是利用在不同的訊息集合下，嘗試增加另一變數，視其能否降低預測誤差的觀念，來進行因果關係的檢定。值得一提的是，**Granger **因果關係是指統計上的因果關係，其不全然是我們一般所謂的導致關係，嚴格說來，應稱為領先落後關係。**Granger **對變數之間的因果關係提出了下列定義：**

假設：過去及現在可能會影響未來，但未來無法影響過去。因此假定 I(n)**為定態的隨機過程，且** I(n) **為包含所有資訊之集合，令** $\bar{I}=\{I_{n-j};\ j=1,2,3\cdots\infty\}$**、**
$\bar{\bar{I}}=\{I_{n-j};\ j=0,1,2\cdots\infty\}$

(1) **獨立關係**(Independence)

若 $\boldsymbol{d}^2(Y|\bar{I})=\boldsymbol{d}^2(Y|\overline{I-X})=\boldsymbol{d}^2(Y|\bar{I},\bar{\bar{X}})$

且 $\boldsymbol{d}^2(X|\bar{I})=\boldsymbol{d}^2(X|\overline{I-Y})=\boldsymbol{d}^2(X|\bar{I},\bar{\bar{Y}})$

則稱 X **與** Y **相互獨立，表示在預測** ***X*時，加入 *Y*的資訊並不能改善其預測能力；反之在預測 *Y*時，加入 *X*的資訊並不能改善其預測能力有相同的情況。**

(2)**當期因果關係**(Instantaneous Causality)

若$d^2(X|\overline{I},\overline{\overline{Y}}) < d^2(X|\overline{I})$

則稱當期的 *Y* 影響 *X*，即將當期的 *Y* 資訊加入原資訊集合中，比未加入 *Y* 有較佳的預測能力。

(3)因果關係(Causality)

若$d^2(X|\overline{I-Y}) > d^2(X|\overline{I})$

則稱為 Y 為 X 的因，在預測 X 序列時若加入 Y 的資訊將有助於降低 X 的預測誤差，即以包含 Y 的資訊來預測 X，結果要比不包含 Y 的資訊來預測 X 要來的正確。

(4)回饋關係(Feedback)

若$d^2(X|\overline{I-Y}) > d^2(X|\overline{I})$

且$d^2(Y|\overline{I-X}) > d^2(Y|\overline{I})$

則稱 X 與 Y 之間存在回饋關係，也就是說當預測 X 序列時若加入 Y 的資訊將有助於降低 X 的預測誤差，即以包含 Y 的資訊來預測 X 在結果會使預測能力更佳，反之亦然，而當兩變數互相都有影響互為因果時，則稱為回饋關係。

Granger(1969)除了在其文獻中對因果關係進行定義外，並發展出一雙變數迴歸式如下:

$$y_t = \boldsymbol{\alpha}_0 + \boldsymbol{\alpha}_1 y_{t-1} + \cdots + \boldsymbol{\alpha}_1 y_{t-n} + \boldsymbol{\beta}_1 x_{t-1} + \cdots + \boldsymbol{\beta}_t x_{t-n} \qquad (3\text{-}1)$$

$$x_t = \boldsymbol{\alpha}_0 + \boldsymbol{\alpha}_1 x_{t-1} + \cdots + \boldsymbol{\alpha}_1 x_{t-n} + \boldsymbol{\beta}_1 y_{t-1} + \cdots + \boldsymbol{\beta}_t y_{t-n} \qquad (3\text{-}2)$$

這個迴歸式中有個小缺失就是並沒有考量到同期影響關係(Contemporaneous)[註1]，檢定結果只會有三個 Granger 所定義的因果關係，【x 與 y 為獨立關係】、【x 與 y 為因果關係】、【x 與 y 為回饋關係】。

註 1：假設 X 與 Y 具有同期影響關係，表示加入同期 Y(X)的資訊，對 X(Y)的預測有所幫助。

對於所有的(x,y)數對，檢定出的 F-statistic 即所謂的 Wald statistic，而其 joint hypothesis 為：$\beta_1 = \beta_2 = . . . = \beta_t = 0$。對於上兩式，第一個迴歸式(3-1)的 null hypothesis 為 x does not Granger-cause y、第二個迴歸式(3-2)的 null hypothesis 為 y does not Granger-cause x。

Granger causality 檢定是先選取不同的落後期數代入模型中，得到的結果會是兩個迴歸式之 F-statistic 與其對應的 *p-value*，這時就以 *p-value* 來判斷是否拒絕虛無假設。嚴格的說，如果(3-1)迴歸式的 *p-value* ＞ 0.01 顯著水準的話，表示接受虛無假設，x does not Granger-cause y，若 *p-value* ＜ 0.01 顯著水準的話，表示拒絕虛無假設，x Granger-cause y。(3-2)迴歸式同理可得。

第二節　單根檢定及共整合

一、單根檢定

在建構整個研究方法前，先要定義定態(stationary)數列的觀念。定態與非定態(nonstationary)時間序列的差別在於定態時間序列之長期預測將收斂至無條件的平均值，及數列具有未隨時間變動之條件變異數，而非定態時間序列的平均值及變異數會隨時間改變而改變。換句話說一序列的聯合條件機率未隨時間的改變而改變，則該隨機過程(stochastic process)稱之為定態。因此，一隨機過程$\{S_t\}$被稱之為定態，當：

$$E(S_t) = \mu \qquad Var(S_t) = \sigma^2 \qquad Cov(S_t, S_{t+j}) = Cov(S_{t-k}, S_{t-k+j}) \qquad (3\text{-}3)$$

若不符合上述條件，則此一序列稱之為非定態。

Granger and Newbold(1974)以 Monte Carlo 模擬發現，對獨立非定態變數進行迴歸分析時，傳統之 t 和 F 檢定會過度拒絕虛無假設，而產生錯誤的統計推論。所以，雖然迴歸分析之結果有很高的 R^2、t 統計量非常顯著，但 Durbin-Watson 值偏低，此即為 Granger & Newbold (1974)所提出的假性迴歸(spurious regression)的問題，而認為傳統檢定方法在拒絕沒有序列相關的虛無假說時會有很大偏誤。

本研究是探討股價指數期貨與現貨的因果關係，和其它的財務實證一樣，在對兩時間序列作分析之前，必須先檢定兩時間序列是否為定態數列。要檢定是否為定態數列，則要用單根檢定法。

Nelson & Plosser (1982)對於許多的總體經濟變數加以研究，並發覺大多數的變數存在非定態(nonstationary)的特性，學術界大致接受多數總體經濟變數存在單根的事實，因此以時間數列進行實證研究時多採用單根檢定。根據 Pagan & Wickens (1989)對於時間序列的文獻回顧中發現，常用的單根檢定有 Dickey-Fuller (DF)檢定、Augmented Dickey-Fuller (ADF)檢定、Phillips & Perron (PP)檢定，ADF 檢定較 DF 檢定強而穩定且 Schwart (1987)以 Monte Carlo 法模擬結果顯示，ADF 及 PP 均足以修正移動平均項所造成的噪音問題，其中又以 ADF 較 PP 為佳，因此我們採用 ADF 檢定來驗證時間序列資料是否呈現穩定的狀態。

ADF 檢定的形式在於將非定態的變數經過一階差分之後，對變數本身滯延一期之序列及變數一階差分的滯延項進行迴歸分析，首先不納入時間趨勢，考慮一自我迴歸式：

$$\Delta Y_t = b + b_1 Y_{t-1} + \sum_{k=1}^{n} g_k \Delta T_{t-k} + e_t \qquad (3\text{-}4)$$

上式中 e_t 為白噪音過程(White Noise Process)，選擇適當的滯延期數 n 能確保誤差項之間為不相關的白噪音，使得迴歸式能夠盡量呈現系統的動態行為。由上式得知，當 Y_t 不為定態則要求 $b_1 = 0$，而當 Y_t 為定態則 $b_1 \neq 0$，因此統計檢定假設：

H_0：$b_1 = 0$　(Y_t 數列存在單根，為非定態的時間序列)

H_1：$b_1 \neq 0$　(Y_t 數列不存在單根，為定態的時間序列)

如果數列(Y_t)經過 ADF 檢定而無法拒絕虛無假設(H_0)，需將數列進一步差分並且再次代入 ADF 模型中進行檢定其是否為定態數列，方程式如下：

$$\Delta dY_t = b + b_1 Y_{t-1} + \sum_{k=1}^{n} g_k \Delta dT_{t-k} + e_t \tag{3-5}$$

如果此時數列(Y_t)拒絕虛無假設，時間序列資料呈現定態此時資料符合 ARMA**，**(Y_t)**為** I(1)**數列，而大多數的經濟變數通常呈現** I(1)**的性質，**I(d)**表示資料經過** d **次差分後呈現定態，則符合共整合的先決條件，因此我們將進一步以共整合分析對資料作進一步的探討。**

二、共整合檢定

複雜的經濟環境中，存在一些成對的經濟變數，他們不會偏離彼此太大，至少在長期是如此。也就是說，這些變數在短期內或因為季節因素，會存在差異，但經濟的力量(**市場機能或政府介入**)**會再度使其重新聚集，這就是所謂的共整合**(cointegration)**。共整合的觀念，由** Granger **提出，若兩變數原本不屬於定態的時間數列，故其線性組合也會不屬於定態的數列，但變數之間具有某些經濟關係，而存在一種組合是屬於定態時間數列，則稱兩變數間具有共整合關係。共整合關係可以描述如下：**

整合級次(integrated order)d **定義為一時間序列** Y_t**，其經過** d **次差分後可表示為一定態的** ARMA **形式，此時** Y_t **稱為** d **階整合，以**$Y_t \sim$ I(d)**表示。由於大多數的經濟變數多呈現** I(0)**數列，即非定態之時間數列，而我們必須經過一階差分後使數列呈現** I(1) **定態序列，因此我們將就定態數列及非定態數列做一比較如表** 3-1**：**

表 3-1　定態數列與非定態數列之比較

定態數列	非定態數列
平均值為 0，變數緊繞平均值變動，有回到平均值的趨向。	少通過平均值
變異數有限，不隨時間而增加。	變異數隨時間快速增加，當時間趨近無限大時，變異數亦趨近於無限大。
隨機衝擊項只有短暫影響，時間越遠影響越小。	隨機衝擊項有持續性影響，對數列有長久記憶性。
變數再一次跨越平均值的時間隔有限。	數列與平均值交叉的間隔期間無限大。
隨著遞延期間增長，自我相關係數迅速下降，其和有限。如白色噪音(white noise)即為 *I(0)*數列。	自我相關係數隨者時間的增加漸趨於 1。如隨機漫步模型(randon walk)即典型的 *I(1)*數列。

由表可知，I(0)數列與 I(1)數列有很大的差異性。所以在作時間序列之各項統計分析前，必須先使數列呈現穩定的狀態，這亦是進行共整合檢定之必要條件。若有兩個變數經由差分方式轉成定態數列後，在討論兩者的相關性時可能會喪失變數間原本存在的長期均衡關係，因此產生不當的結論。而 Engle & Granger (1987)提出的共整合分析即在避免差分之缺點。

當變數 X_t 和 Y_t 為 I(1)數列，其線性組合通常也是 I(1)數列，但若此時存在一向量使得其線性組合 $Y_t - m - bX_t = E_t$ 成為 I(0)數列，則無須再對個別數列取差分兩數列即具有長期均衡關係，這時，稱 X_t 和 Y_t 兩時間序列為共整合。變數間是否有共整合關係，彼此必須具有同一整合級次的先決條件，這也就是為何要先作單根檢定的原因之一。以兩變數 X_t 和 Y_t 為例，若變數間整合級次同，則其線性組合便不具意義，因為並無任何參數級次不同，則其線性組合便不具意義，因為並無任何參數能滿足其整合方程 $Y_t = m + bX_t + e_t$，而使 e_t 成為一整合級次數列。就共整合向量而言，其重要性在於能連結兩變數，使彼此的隨機趨勢成份相互匹配而獲得一定態的線性組合。雖然長期下，變數間會呈各自來回漫步狀態，但由於其間存在著比例的共同因素，使其成群的漂移，故不會互相游移而越來越遠。

所以當股價指數期貨與現貨價格間具有相同的整合級次(由單根檢定得知)，則可利用共整合檢定來檢定兩數列間，是否存在著長期均衡的關係，並使得其共整合迴歸

誤差項 e_t 為一定態的時間序列。而共整合檢定一般有兩個方法:Engle & Granger 兩階段估計法(two-step estimation)與 Johansen 最大概似法(Maximum Likelihood Method)。其中 Johansen 最大概似估計法有較多優點，故本研究以應用較廣的 Johansen Cointegration Test 作為共整合檢定法，表 3-2 將其特點比較如下：

表 3-2 Engle & Granger 兩階段估計法與 Jonansen 最大概似法之比較

Engle & Granger two-step estimation	Johansen Maximum Likelihood Method
A. 以雙變數為主，方法雖然計算簡單，但是卻有正規化(Normality)問題：即若採用不同變數作應變數，則以 OLS 估計將產生不同的結果。 B. 只能找到一組共整合向量。	A. 可估計出變數間存在的所有共整合關係，並針對變數間關係加以檢定。 B. 檢定統計量具有正確良好的極限分配，以檢定變數間的共整合向量個數。 C. 最大概似法有以下五個特點： 1. 可以獨立估計共整合向量的個數。 2. 可以對其整合向量的個數進行檢定。 3. 可以對向量誤差修正模型之估計進行檢定。 4. 基於最大概似原則所建立。 5. 有良好的極限分配。 D. Gonzalo (1989)曾將各種估計、檢定共整合關係之方法進行蒙地卡羅模擬，發現由最大概似函數求得的估計式較佳，可改善 Engle & Granger 二階段檢定法在小樣本下，參數估計偏誤的情形。

Engle & Granger(1987)的方法存在一些缺失，尤其在臨界值的選用上須特別小心，因其臨界值數值較小，使得實證結果易傾向於接受共整合，因此本研究運用 Johansen 最大概似法進行共整合檢定，其統計量為：

$$\lambda_{\text{trace}}(\gamma) = -T \sum_{i=r+1}^{n} ln(1-\lambda_i) \qquad (3\text{-}6)$$

其中，γ 代表共整向量，T 代表觀察值個數，而 λ_i 則為特徵根的估計值。在檢定的過程中，Johansen 是以下列兩種的概似比檢定選擇共整合向量個數 γ。而本研究則採

軌跡檢定。

1、**軌跡檢定**(Trace Statistic)：此為 Osterwald-Lenum (1992)所作的 reduced rank 檢定，概似比(Likelihood Ratio)檢定統計量為：

$$Q_r = -T\sum_{i=r+1}^{k}\log(1-\lambda_i) \tag{3-7}$$

H_0：最多有 r 個共整合向量

H_1：至少有 $r+1$ 個共整合向量

2、**最大特性根檢定**(Maximum Eigenvalue Statistic)：此為 Johansen & Juselius (1990)所作的 reduced rank 檢定，其檢定統計量為：

$$Q_{\max} = -T\log(1-\lambda_{r+1}) = Q_r - Q_{r+1} \tag{3-8}$$

在檢定準則方面：若 Johansen Cointegration Test 之 Likelihood Ratio 大於 5%顯著水準下的 critical value，則具有共整合關係，而落後期數的選取亦以 min(AIC)及 min(Schwarz criterion)為準則。若檢定結果顯示股指期貨與現貨價格間具有共整合關係，則以誤差修正模型(Error-correction model, ECM)進行線性 Granger 因果關係檢定；反之，則以序列之差分值搭配傳統的向量自我迴歸(Vector autoregression, VAR)進行線性 Granger 因果關係檢定。

根據 Engle & Granger (1987)，若兩個(以上)序列為共整合，則存在有一誤差修正之表示方式，亦即：

$$\Delta S_t = a + \alpha e_{t-1} + \sum_{i=1}^{m}\gamma_i \Delta S_{t-1} + \sum_{j=1}^{n}\delta_j \Delta F_{t-j} + u_t \tag{3-9}$$

其中 $\alpha \neq 0$，藉由 ΔS 與 ΔF 之遞延項，使 u_t 近似白噪音，e_{t-1} 代表誤差修正項，m 代表現貨價格的最適遞延期數，n 代表期貨價格的最適遞延期數。(3-9)式表示 S_t 之變化相對於上期來自均衡迴歸式之誤差與變數變動之滯延。其中，e_{t-1} 為上期序列實際

值與均衡值差異所組成，其對於現貨指數或期貨價格之變動具有重要的解釋能力，亦即上一期的錯誤定價對本期的期貨或現貨價格之變動具有因果關係。至於誤差修正係數a，亦即調整速度，衡量上期錯誤定價可以在本期反應於S_t變化之能力。若此係數值小或在統計上不顯著，則因變數ΔS_t將較難從偏離修正回長期均衡值。

關於最適遞延期數的決定，中(3-9)式中的其中 m 與 n 決定，一般採用 Akaike information criterion(AIC)與 Schwartz Bayesian criterion(SBC)準則，其計算方式如下：

$$\text{AIC} = T \ln \boldsymbol{\varepsilon}^2 + 2p \tag{3-10}$$

$$\text{SBC} = T \ln \boldsymbol{\varepsilon}^2 + p \ln(T) \tag{3-11}$$

其中，T 為觀察值個數、 $\boldsymbol{\varepsilon}^2$ 為誤差平方和、p 為待估計係數之數目，SBC 在大樣本之下有較佳之特性，亦即在大樣本之下，具有漸近一致性，因此是較佳的準則。本研究將同時考慮這兩種準則，並以 SBC 準則為優先考量之方法。

誤差修正模型為期貨與現貨市場之動態關聯研究提供一個極佳之測試基礎。在誤差修正模型中，共整合關係定義了兩序列之長期均衡關係，然而誤差修正模型可看出價格發現之過程。若兩金融市場之價格序列為非定態且共整合，則表示兩者之間存在一長期均衡關係，且可以(3-9)式之誤差修正模型表示之。換言之，現貨市場之價格序列 S_t 之變化可由上期之均衡誤差、期貨市場價格序列 F_t 之遞延項的變化與 S_t 本身過去之變化所解釋。若誤差修正模型中d_j具有統計上的顯著性，則現貨價格序列 S_t 目前之變化，可被期貨價格序列 F_t 之過去變化所解釋，亦即期貨與現貨間存在著因果關係，期貨市場對現貨市場具有影響力。若d_j不具有統計上的顯著性，但誤差修正係數a仍顯著，則表示期貨與現貨間具有共同起勢(common trend)。而現貨市場的變動ΔS 乃是由於期貨與現貨線性趨勢之結果。而這種結果 Granger 因果關係檢定是無法得知的。

本研究另外透過 GARCH 模型來探討報酬序列的領先落後關係，因研究限制只針對摩台指及台台指期貨與現貨之報酬率數列來做檢定。而本研究對於報酬率的定義乃

是根據連續複利(continuous compounding)的觀念，報酬率的計算方法是將原來的期貨指數或是現貨指數數列取對數之後，再取一次差分而得。

第三節　常態分配檢定及自我相關檢定

一、常態分配檢定

常態分配檢定主要採用兩種方法，第一種為適合度檢定(goodness-of-fit test)，根據計算出之數列的 Kolomogorov-Smirnov D 機率分配適合度統計值，或是 w 統計值(當樣本數較少時)，來檢定數列的機率分配是否為一常態分配。其虛無假設為 H_0：D=0，表示該數列為一常態分配，而對立假設為 H_1：D>0，表示該數列不為一常態分配。若 D 值大於 5%顯著水準的臨界值，則拒絕該數列為常態分配。

第二種方法為偏態係數(skewness)、峰態係數(kurtosis)檢定法，如果一數列為一常態分配，則其偏態係數的值為 0。故可檢定偏態係數是否為 0，來判定此數列是否為一常態分配。

$$\text{偏態係數} = \frac{\sum_{t=1}^{n}(r_t - \overline{r_t})^3}{ns^3} \tag{3-12}$$

其中，r_t 表示報酬率，其平均數為 $\overline{r_t}$，n 為樣本數，而 s 則表該報酬率數列之標準差。對於一常態分配而言，其偏態係數平均數為 0、變異數為 $6/n$ 之常態分配。因此，檢定某數列是否符合常態分配時，可檢定其偏態係數是否為零。其虛無假設為該數列符合常態分配，檢定的方法，則是採用傳統的 Z 檢定，在 5%的顯著水準之下，檢定偏態係數是否介於正負兩倍的標準差之間，即介於 $2\sqrt{6/n}$ 與 $-2\sqrt{6/n}$ 之間。若偏態係數落於正負兩倍的標準差之外，在 5%的顯著水準之下，則拒絕該數列符合常態分配之假設。

如果一數列為一常態分配，則其峰態係數的值為 3。故可檢定峰態係數是否為 3，來判定此數列是否為一常態分配。

$$峰態係數 = \frac{\sum_{t=1}^{n}(r_t - \overline{r_t})^4}{ns^4} \tag{3-13}$$

對於一常態分配而言，其峰態係數平均數為 3、變異數為 24/*n* 之常態分配。因此，檢定某數列是否符合常態分配時，可檢定其峰態係數是否為 3。其虛無假設為該數列符合常態分配，檢定的方法，則是採用傳統的 Z 檢定，在 5%的顯著水準下，檢定峰態係數減 3 後是否介於正負兩倍的標準差之間，亦即$2\sqrt{24/n}$與$-2\sqrt{24/n}$之間。若偏態係數落於正負兩倍的標準差之外，在 5%的顯著水準之下，則拒絕該數列符合常態分配之假設。

二、自我相關檢定及異質性檢定

若要檢定一組的序列相關係數是否為零，則須採用一聯合檢定，譬如依據 Ljung-Box 的 *Q* 統計量，方程式如下:

$$Q(P) = n(n+2)\sum_{s=1}^{p}\frac{1}{n-s}\,r_s^2 \sim X^2(P) \tag{3-14}$$

其中 n 為樣本數，s 表落後期數。此統計量為一自由度為 P 之卡方分配。其虛無假設為自我相關統計量($r_1, r_2, r_{3,}$ … r_p)皆為零，對立假設為自我相關統計量不全為零。若一估計量 *Q(P)*大於 5%顯著水準之臨界值，則拒絕沒有序列相關的虛無假設。所謂異質性即表示一數列之變異數並非固定之常數，而會隨時間而變動，檢定異質性時亦採用 Ljung-Box 檢定法，如果報酬率平方的 *Q*(*P*)值大於報酬率之 *Q*(*P*)值，則該數列具有異質性；反之，則無異質性之存在。

第四節　ARCH 模型及 GARCH 模型

一、ARCH(Autoregressive Conditional Heteroscedasticity)模型

研究時間序列資料除了需要檢測序列自我相關係數之外，欲進行GARCH模型分析之前，進一步要檢驗是否有ARCH效果。一般的計量經濟模型必須在變異數固定的假設下運作，但是實證上有許多財務的時間序列資料並不符合變異數固定的假設。Engle (1982) 首先提出自我迴歸條件異質變異數 (Autoregressive Conditional Heteroscedasticity；ARCH)模型，此模型允許條件變異數為過去殘差的函數，且描述變異數隨時間而改變的過程，稱此為ARCH模型。

一般用來檢定變異數異質性的方法有兩種：一為Engle (1982)所發展的LM檢定(Lagrange Multiplier Test)；另一為LR(Likelihood Ratio Test)，過去研究大多使用LR檢定，故本研究延用過去學者的檢定方法LR檢定，來檢測時間序列資料變異數的異質性，其虛無假設為$H_0 = a_1 = a_2 = \cdots\ a_i = 0$及對立假設為$a_i$不全為0，利用迴歸模型求得報酬率的殘差項，並將所求之殘差平方項對其落後期殘差平方項作迴歸，由以上求得之迴歸複判定係數乘以樣本數即為檢定統計值TR^2，其為$c^2 \sim (i)$之漸近分配，若$TR^2 > c^2 \sim (i)$，則拒絕虛無假設H_0，表示時間序列資料之變異數隨時間的改變而改變。

二、GARCH(Generalized Autoregressive Conditional Heteroskedastic)模型

在研究時間序列分析時，所使用的資料必須符合一些基本假設。1970年代由Box & Jenkins所發展出的ARIMA(Autoregressive Intergrated Moving Average)模型，雖然考慮到時間序列的自我相關現象，但其設殘差項的變異數為一常數，使得其在應用上受到相當的限制。若一時間序列具有異質性，那麼傳統的ARIMA模型便不適用，此時必須採用允許變異數隨時間改變而改變的模型。而在財務實證文獻上，一般廣為學者採用的是GARCH(Generalized Autoregressive Conditional Heteroskedastic)模型。

根據實證研究，股票報酬的分配情況與常態分配相比較，通常有高狹峰(high peakedness)與厚尾(fat-tail)的現象，Engle (1982)和 Bollerslev (1986)提出的 GARCH 模型可以解釋厚尾的現象，且驗證了變異數不相等的異質性。

Engle (1982)提出 ARCH 模型之後，Bollerslev (1986)以前期的條件變異數加入 ARCH 模型，稱為一般化自我迴歸異質變異數模型(GARCH)，根據許多近期的研究，如：Najand & Yung (1994)、Abhyankar (1995)及 Hiraki et al (1995)等指出，GARCH(1,1) 適合做為對股價指數研究的模型，因此本研究擬採用 GARCH(1,1)模型做實證分析，此模型可表示如下：

$$r_t = x_t C + e_t \tag{3-15}$$

$$e_t | \Psi_{t-1} \sim N(0, h_t) \tag{3-16}$$

$$h_t = a_0 + a_1 e^2{}_{t-1} + b_1 h_{t-1} \tag{3-17}$$

其中 r_t:報酬率[註1] x:解釋變數之向量 C:解釋變數之係數向量

e_t:殘差項 Ψ_{t-1}:表示在 t-1 期所有可利用的訊息集合 h_t:條件變異數

a_1 及 b_1:為欲估計之參數

GARCH(1,1)模型的穩定條件為 $a_1 + b_1 < 1$。此外，由於報酬率資料具有自我相關，異質變異數的性質，違反了一般迴歸分析的假設。因此，在檢定領先效果時，迴歸式採用 Hansen (1982)的一般化動差估計式(Generalized Method of Moments Estimator；GMM)，而不是用最小平方估計式(Least Square Estimator；LSE)加以估計。為了檢定報酬率的領先效果，使用以下迴歸式檢定報酬率是否具有領先效果，迴歸式如下：

$$r_{f,t} = a + \sum_{j=-10}^{10} b_j r_{c,t-j} + e_t \tag{3-18}$$

其中 $r_{c,t-j}$:第 t-j 期的指數現貨報酬率 $r_{f,t}$:第 t 期的指數期貨報酬率

e_t : 殘差項

註 1：在連續複利(continuously compounded)的假設下，所使用的報酬率之計算方式如下： $r_t = ln(I_t/I_{t-1})$

第五節　Bivariate GARCH 模型

Bivariate GARCH **模式具有期貨與現貨雙變數分配的前兩個條件動差式，為了考慮可能的共整合性，所以需要在第一式中加入殘差修正。為了考慮到隨時間變動的變異數及共變數，將第二動式以固定相關性的雙變數** GARCH(1,1)**參數化所定義的計量模式，以下式表示：**

$$S_t = \boldsymbol{a}_0 + \boldsymbol{a}_1(S_{t-1} - \boldsymbol{g}F_{t-1}) + \boldsymbol{e}_{st} \tag{3-19}$$

$$F_t = \boldsymbol{b}_0 + \boldsymbol{b}_1(S_{t-1} - \boldsymbol{g}F_{t-1}) + \boldsymbol{e}_{ft} \tag{3-20}$$

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{e}_{st} \\ \boldsymbol{e}_{ft} \end{bmatrix} \Bigg| \boldsymbol{y}_{t-1} \sim N(0, H_t) \tag{3-21}$$

$$H_t = \begin{bmatrix} h_{s,t}^2 & h_{sf,t} \\ h_{sf,t} & h_{f,t}^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} h_{s,t} & 0 \\ 0 & h_{f,t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & \boldsymbol{r} \\ \boldsymbol{r} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h_{s,t} & 0 \\ 0 & h_{f,t} \end{bmatrix} \tag{3-22}$$

$$h_{s,t}^2 = c_s + a_s \boldsymbol{e}_{s,t-1}^2 + b_s h_{s,t-1}^2 \tag{3-23}$$

$$h_{f,t}^2 = c_f + a_f \boldsymbol{e}_{f,t-1}^2 + b_f h_{f,t-1}^2 \tag{3-24}$$

$\boldsymbol{y}_{t-1}$ **：為** t-1 **時的資訊組合**
H_t **：為** t **期的共變數矩陣**
$S_{t-1} - \boldsymbol{g}F_{t-1}$ **：為殘差修正項**
$\boldsymbol{r}$ **：為固定的相關係數**