

風險值模型修正 - 期貨契約之應用

An Adjusted Value-at-Risk Model for Futures

李進生¹ 袁淑芳²

(Received: Nov. 28, 2005 ; First Revision: Mar. 30, 2006 ; Accepted: Apr. 9, 2006)

摘要

風險值在於估算未來評估期間資產損益的損失風險金額，傳統的期貨契約風險值模式，直接利用期貨對於標的現貨價格之敏感度，來估算期貨風險值，其中隱含了基差值固定的假設，然而根據期貨的契約特性，基差值具有到期收斂的特性，使得傳統模型對於期貨契約風險值的估計將產生較大的誤差。本文納入基差(basis)於未來評估期間的收斂效應，並考慮無風險利率隨機變動特性，推導出適合的期貨風險值模式，並以指數期貨為實證標的，比較台灣加權指數期貨、摩根台指期貨，與 S&P 500 指數期貨對於模式適用性。

關鍵詞：風險值、基差、基差收斂效果

Abstract

An early VaR technique, which considers the first partial derivatives, is generally adopted in evaluating the risk exposures of futures. However, we believe that if the poor assumption where the basic convergence effect of the relationship between futures prices and spot prices presumed in traditional model is ignored, it will lead to the predicted VaR of futures being consistently underestimated. Hence, an adjusted VaR model that incorporates the basic convergence effect into the risk valuation process is highly encouraged in this article as a replacement for the traditional model.

Our empirical results indicate that there is a significant improvement in the accuracy of the predicted estimates using the adjusted model as compared with the traditional model. The evidence supports the adoption of an approach that uses the adjusted model proposed in this paper to estimate the VaR for futures data.

Keywords : Value-at-Risk (VaR), Basis, Basis Convergence effect

¹銘傳大學財務金融學系教授

²淡江大學財務金融所博士候選人暨南華大學企管系講師

1. 前言

自 1996 年 J.P. Morgan 提出風險值 (Value-at-Risk, VaR) 觀念以來, 很快為巴塞爾協議 (Basle Accord) 接受, 並規範金融機構應以風險值揭露市場風險報告書, 來滿足監理的需求³。近年來, 探討風險值的文獻大量產出, 其中包括資產報酬分配特性、資產報酬波動性對於風險值估算的影響、非線性損益衍生性商品的風險值估算方法, 及考慮情境分析與極端值理論來探究市場極端狀況之估算等, 使得風險值的估算架構漸趨完整⁴。

風險值估計模型, 其主要的精神即在透過資產訂價的工具, 推估持有該資產 k 天後的報酬分配情形, 進而估算在 % 發生機率下的最大可能損失值。由此, 風險預估值的準確程度與對資產報酬特性的預測能力有關, 為了滿足預測模型適合度的要求, 一般模型都必須使用足夠的樣本資料進行資產報酬的預估。然而, 對於具有到期期間的資產, 如期貨、選擇權等, 往往產生資料不足的問題。以台灣股價指數期貨為例, 每一交易日市場報價的期貨契約分別為最近二個月及未來連續三個季月等五個契約, 但投資人主要交易的契約仍以近月或次近月契約為主, 而其它遠月契約, 往往會有成交量不足, 甚或有價無量的現象, 使得報價資料不具參考性。所以每一個期貨契約能夠真實反應市場價值的資料點有限。據此在計算期貨部位的風險值上, 有必要透過期貨與現貨的價格關係反推求得。

自從 Working(1949)以持有成本理論建立期貨與現貨之間的關係, 即可確定在完美市場下⁵, 透過市場的機能, 期貨的均衡價格是可被預期的, 而誤差來源在於真實市場與完美市場的差異。因此, 透過持有成本理論, 由現貨風險值推估期貨風險值, 部份估計誤差將來自於對於市場特質的誤設。除此之外, 其餘的誤差, 將來自單期期貨價格預估模型過渡至持有多期的風險預估模型上, 對於期貨及現貨價格關係係數的誤設。本文的主要目的即在修正該項誤差來源。並試圖重新建立期貨部位風險值估計式。

2. 研究方法

2.1 傳統模型

一般而言, 期貨定價仍以 Working(1949)提出的持有成本理論(cost of carry theory)較常被使用。在完美市場的假設下, 現貨與期貨價格之間的基差值(basis), 即為現貨的淨持有成本。同時根據風險中立(risk neutral)原則, 持有現貨的機會成本即為無風險利率(r)。另一方面, 根據 Working 在無套利機會的假設, 期貨價格即為現貨價格於期貨契約到期日之期望值, $F=E(S_T)$ 。因此在 Working 構建的完美市場假設下, 現貨部位

³ 請參考 Bank of International Settlement (BIS 1994, 1995, 1996)。

⁴ 有關風險值理論之相關文獻可參考 Baumol (1963), J.P. Morgan(1996), Duffie & Pan(1997), Dowd (1998), Hull (1998), Johanson et al., (1999), Linsmeier & Pearson (2000), Jorion(1996, 2000), Penza & Bansal (2001) 等。相關網站可參考 www.gloriamundi.org。

⁵ 根據 Copeland & Weston(1992)對於完美資本市場的定義必須滿足四個條件：(1)無交易成本。(2)市場完全競爭。(3)市場具效率。(4)理性參與者。

股利支付率為 d ，期貨的理論價格可以用遠期契約定價模型表示。如式(1)。

$$F_{t,T} = E(S_T) = S_t e^{(r-d)(T-t)} \quad (1)$$

Working 假設 r 及 d 為固定已知的常數，且距到期日($T-t$)由契約決定，因此現貨價格(S)為期貨定價模式的唯一的風險因子，亦稱單一因子模型。當對期貨價格進行全微分，則期貨價格的變動率與現貨價格的變動率將呈線性關係。

$$dF_{t,T} = \delta_t dS_t \quad (2)$$

其中 $\delta_t = e^{(r-d)(T-t)}$ ，為 t 時點的一階偏微係數。由於標的現貨的風險值為價格變動的函數，因此利用式(2)的線性方程式，得以描述期貨風險值與現貨風險的關係，其中線性關係式的係數即為 δ_t 的絕對值⁶。

$$VaR_F = |\delta_t| \times VaR_S \quad (3)$$

由式(3)可知，期貨部位的風險值可由 δ_t 及現貨風險值乘積表示。其中， δ_t 相當於持有現貨(S)到期且以 r 連續複利的結果，所以在 r 與 d 固定下， δ_t 值由距期貨到期日 ($T-t$) 決定；另一方面，現貨風險值由持有期間(k)資產的報酬率決定。因此， δ 值與現貨風險值(VaR_S)受不同的因素而決定，意謂不論期貨部位持有期間多長，將不影響上式中的 δ_t ，二者具有獨立性。以一般式表示如式(4)。此即期貨風險值(VaR_F)之傳統估計式。

$$VaR_F^k = |\delta_t| \times VaR_S^k = e^{(r-d)(T-t)} \times VaR_S^k \quad (4)$$

其中 k 值表示期貨部位預計持有天數，即所謂 k 天風險值。

式(4)中隱含了重要的假設，即未來 k 天，期貨與現貨價格變動將維持固定的線性關係，亦即， $\delta_t = \delta_{t+1} = \dots = \delta_{t+k}$ 。然而根據期貨理論，期貨價格將隨契約到期日的接近而向現貨價格收斂，即 $E(F_{T,T}) = S_T$ ，亦即 $E(\delta_T) = 1$ ，意謂 δ 值為非固定常數。同時根據式(2)， δ 值將隨期貨契約的到期以 $e^{-(r-d)\Delta t}$ 的速度逐漸向 1 收斂，因此式(4)中，設 δ 值為固定常數將會使得期貨風險值的估計式產生偏誤。

為了解決上述問題，本文試圖將期貨預計持有 k 期中 δ 值的變化及對期貨風險值的影響納入期貨風險值估計式中，其目的即在修正傳統期貨風險估計式(式(4))中 δ 值為固定常數的假設，並以 δ 值的收斂速度進行調整。

2.2 指數型修正模型

延續持有成本理論的一因子模型，期貨價格可完全由現貨價格解釋， $F = F(S)$ 。接

⁶ 風險值為大於零的任意常數。

著，對 F 展開全微分，

$$dF = F'_{(S)} dS$$

根據持有成本理論(式(1))，可知期貨價格對現貨的偏微值 $F'_{(S)}$ 可表示如下。

$$F'_{t,T(S)} = \frac{\partial F_{t,T}}{\partial S_t} = e^{(r-d)(T-t)} \quad (5)$$

此偏微係數，即 t 時間點的值(即 $F'_{t,T}$)。在 r 及 d 固定的假設下，值由期貨到期日($T-t$)而決定。由此未來 k 期值的變化即如下所示：

$$\begin{aligned} dF_{t+1} &= \delta_{t+1} dS_{t+1} = e^{(r-d)(T-t-1)} dS_{t+1} \\ &\vdots \\ &\vdots \\ dF_{t+k} &= \delta_{t+k} dS_{t+k} = e^{(r-d)(T-t-k)} dS_{t+k} \end{aligned} \quad (6)$$

上式說明值將隨時間而以 $e^{-(r-d)\Delta t}$ 的速度進行遞減，其中 Δt 為時間變動量。

當再對式(6)同除以當期現貨價格，則：

$$\begin{aligned} \frac{dF_{t+1}}{S_{t+1}} &= e^{(r-d)(T-t-1)} \frac{dS_{t+1}}{S_{t+1}} \\ &\vdots \\ \frac{dF_{t+k}}{S_{t+k}} &= e^{(r-d)(T-t-k)} \frac{dS_{t+k}}{S_{t+k}} \end{aligned} \quad (7)$$

在式(7)左式中， $\frac{dF}{S}$ ，可表示為期貨的即期報酬⁷，根據報酬相加的特性，期貨 k 期報酬(R_F^k)如下：

$$R_F^k = \sum_{i=1}^k \frac{dF_{t+i}}{S_{t+i}} = \sum_{i=1}^k (e^{(r-d)(T-t-i)} \times \frac{dS_i}{S_i}) \quad (8)$$

在式(8)的右式中，當時間變動量 Δt 微小的情況下，現貨的即期報酬 $\frac{dS}{S}$ 將趨近為

⁷ 由於期貨為保證金交易，無期初投入金額，所以以現貨價格相對期貨價格的變動表示為期貨的報酬率

固定常數，即， $\frac{dS_t}{S_t} = \frac{dS_{t+1}}{S_{t+1}} = \dots = \frac{dS_{t+k}}{S_{t+k}}$ 。經過整理， R_F^k 可由未來 k 期相對應 值的和與當期($t = t$)現貨的單期報酬(R_S)的乘積來表示。

$$\sum_{i=1}^k \frac{dF_{t+i}}{S_{t+i}} = \left(\sum_{i=1}^k e^{(r-d)(T-t-i)} \right) \times \frac{dS_t}{S_t} \quad (9)$$

$$\Rightarrow R_F^k = \left(\sum_{i=1}^k e^{(r-d)(T-t-i)} \right) \times R_S$$

同樣的，再透過風險值與報酬之間的線性關係，期貨 k 期的風險值(VaR_F^k)將可以由未來 k 期相對應 值的和與現貨的單期風險值(VaR_S^1)乘積而求得：

$$VaR_F^k = \left(\sum_{i=1}^k e^{(r-d)(T-t-i)} \right) \times VaR_S^1 \quad (10)$$

然而，由式(1)得知持有期間(dt)將決定現貨淨持有成本，所以期貨價格必然與資產持有期間有關，也就是說，時間項(t)不僅決定 δ 值，同時也將決定期貨報酬率，將此概念套用在式(9)，我們將發現式(10)不必然成立。以下即針對上述情況進行分析。

設 $F=F(S,t)$ ，本文將 F 對 S 進行 2 次偏微及時間(t)進行一次偏微的方式展開，以分析決定期貨報酬的因子。如下所示：

$$dF = F'_{(S)} dS + F'_{(t)} dt + \frac{1}{2} F''_{(S)} (dS)^2 \quad (11)$$

同時，本文將採用幾何布朗運動(Geometric Brownian Motion)定義現貨價格的路徑。所謂幾何布朗運動即是資產報酬率可以漂移項(drift term)及波動項(noise term)解釋。其中造成資產波動的風險因子(dz)，具有溫式路徑 (Wiener process)的特性⁸。以現貨價格(S)為例，其價格路徑可以表示如下。其中， μ_t 、 σ_t 分別表示 t 期的瞬間報酬與標準差：

$$dS_t = \mu_t S_t dt + \sigma_t S_t dz \quad (12)$$

將式(12)代入式(11)，則：

⁸ 溫式路徑具有為馬可夫路徑(Markov process)的特性，其符合以下條件，(1) $dZ = \varepsilon(dt)^{0.5}$ ，且 $\varepsilon \sim N(0,1)$ 。(2) $dz \sim (0, (dt)^{0.5})$ 。

$$dF_t = F'_{(S)}(\mu_t S_t dt + \sigma_t S_t dz) + F'_{(t)} dt + \frac{1}{2} F''_{(S)}(\mu_t S_t dt + \sigma_t S_t dz)^2 \quad (13)$$

其中 $F'_{(S)}$ 、 $F''_{(S)}$ 、 $F'_{(t)}$ 分別為期貨價格對現貨價格(S)的一、二次偏微係數及對時間項(t)一次偏微係數。

再經過整理，期貨價格的變動以 GBM 的模式表示如式(14)：

$$dF_t = (F'_{(S)}\mu_t S_t + F'_{(t)} + \frac{1}{2} F''_{(S)}\sigma_t^2 S_t^2)dt + (F'_{(S)}\sigma_t S_t)dz \quad (14)$$

最後，根據持有成本理論對於期貨價格的定義，可以分別計算出期貨價格對現貨價格(S)的一、二次偏微係數，及對時間項(t)一次偏微係數。如下：

$$F'_{(S)} = \frac{\partial F_t}{\partial S_t} = e^{(r-d)(T-t)} \quad F''_{(S)} = \frac{\partial^2 F_t}{\partial S_t^2} = 0 \quad F'_{(t)} = \frac{\partial F_t}{\partial t} = -(r-d)S_t e^{(r-d)(T-t)}$$

另外，再度對 dz 的特性進行定義。如下：

$$dz = \varepsilon\sqrt{dt} \quad (dz)^2 = dt \quad \& \quad (dt)^2 \rightarrow 0$$

將以上的結果代入式(14)，即可將 t 期期貨報酬表示如式(15)：

$$\frac{dF_t}{S_t} = e^{(r-d)(T-t)} [(u_t - r)dt + \sigma_t dz] \quad (15)^9$$

同樣地，持有期間(k)中每一時點的期貨報酬可以表示如下：

$$\begin{aligned} \frac{dF_{t+1}}{S_{t+1}} &= e^{(r-d)(T-t-1)} [(u_{t+1} - r)dt + \sigma_{t+1} dz] \\ &\vdots \\ \frac{dF_{t+k}}{S_{t+k}} &= e^{(r-d)(T-t-k)} [(u_{t+k} - r)dt + \sigma_{t+k} dz] \end{aligned} \quad (16)$$

令 dt 極小，則期貨報酬(dS/S)為固定常數。即 $\mu_t = \mu_{t+1} = \dots = \mu$ ，且 $\sigma_t = \sigma_{t+1} = \dots = \sigma$ 。 k 期的期貨報酬表示如下式：

⁹ 根據持有成本理論， r 為已知的固定常數。

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^k \frac{dF_{t+i}}{S_{t+i}} &= \left(\sum_{i=1}^k e^{(r-d)(T-t-i)} \right) \times [(\mu - r)dt + \sigma dz] \\ &= \left(\sum_{i=1}^k e^{(r-d)(T-t-i)} \right) \times (R_s - rdt) \end{aligned} \quad (17)$$

其中 R_s 、 r 分為表示單期的現貨報酬及無風險利率，也亦是說 k 期的期貨報酬可以用未來 k 期的 δ 值和與單期現貨超額報酬(即 $R_s - rdt$)乘積表示。將之代入風險值方程式，即可計算出 k 期期貨風險值之方程式。

$$VaR_F^k = \left(\sum_{i=1}^k e^{(r-d)(T-t-i)} \right) \times BVaR_S^1(r) \quad (18)$$

由式(18)可知，當考慮 t 變動對期貨的影響時， k 期的期貨風險值將由未來 k 期的 δ 值與單期現貨的 $BVaR$ 值乘積¹⁰，其中現貨的 $BVaR$ 值是以 r 為比較基準所計算出的相對風險值。由於式(18)估計式建立在假設 δ 值以 $e^{-(r-d)\Delta t}$ 速度進行收斂，因此本文稱式(18)為指數型修正模型。

2.3 線型修正模型

根據前文分析，傳統模型及指數型修正模型，皆建立在無風險利率(r)為已知且固定的常數的模型假設下。然而當經濟環境面臨重大改變，固定 r 的假設並不符合實際市場的情形，亦即式(18)不成立。正確的期貨風險應表示如式(19)。

$$VaR_F^k = \left(\sum_{i=1}^k e^{(E(r_i) - d)(T-t-i)} \right) \times BVaR_S^1(r) \quad (19)$$

然而 r 的估計，將涉及貨幣供需、經濟環境、及不可預期因素等，因此對 r 的估計誤差將影響期貨風險值估計的準確度，同時可以確定的是式(19)對於期貨風險值的計算成本將顯著增加。為了解決以上的問題，本文建議以線性分配的技巧，對於式(19)

中的 $\sum_{i=1}^k e^{(E(r_i) - d)(T-t-i)}$ 進行估計。

所謂線性分配的技巧，即是根據期貨價格到期向現貨價格收斂的特性，得知到期日 δ 值必收斂為 1，因此假定 t 時點觀察到的 δ 值為 $e^{(r_i - d)(T-t)}$ ，則隱含距到期日， δ 值仍有 $(e^{(r_i - d)(T-t)} - 1)$ 的空間將在契約到期日前進行收斂，最後再以等比例的方式，透過資產持有期間占距契約到期日之比率進行調整。也就是在資產持有期間為 1 期，則 $t+1$ 期 δ

¹⁰ Dembo(1997)對相對風險值(BVaR)的定義為買入原始投資組合並賣出相同部位的比較投資組合(benchmark portfolio)之風險值。BVaR 相對 VaR 的特點在於其可以避免市場的流動性差異所造成判斷風險程度的誤差。

值的估計值如下所示。

$$t+1: \quad \hat{\delta}_{t+1} = \delta_t + (1 - e^{(r_t-d)(T-t)}) \times \frac{1}{T-t} \quad (20)$$

依此類推，於 t 時點，對 $t+2$ 、..... $t+k$ 之 δ 值的估計值如下所示。

$$\begin{aligned} t+2: \quad \hat{\delta}_{t+2} &= \delta_t + (1 - e^{(r_t-d)(T-t)}) \times \frac{2}{T-t} \\ &\vdots \\ t+k: \quad \hat{\delta}_{t+k} &= \delta_t + (1 - e^{(r_t-d)(T-t)}) \times \frac{k}{T-t} \end{aligned}$$

因此，當資產持有 k 期，則未來 k 期對應的 δ 值之和 $\sum_{i=1}^k e^{(E(r_t)-d)(T-t-i)}$ ，即可如式(21)進行估計。

$$\sum_{i=1}^k e^{(E(r_t)-d)(T-t-i)} \approx \sum_{i=1}^k \delta_t + (1 - e^{(r_t-d)(T-t)}) \times \frac{i}{T-t} \quad (21)$$

將該結果代入式(19)，則 k 期期貨風險值的估計式如下所示。本文稱之線型修正模型。

$$VaR_F^k \approx \left(\sum_{i=1}^k \delta_t + (1 - e^{(r_t-d)(T-t)}) \times \frac{i}{T-t} \right) \times BVaR_S^1(r)$$

2.4 比較修正模型對 δ 值的估計誤差

在 Working(1949) 的持有成本理論下， $(t+i)$ 時點的真實 δ 值可表示為 $\delta_{t+i} = e^{(r_{t+i}-d)(T-t-i)}$ 。因此在 r 為固定常數的假設下，指數型修正模型及線型修正模型對 δ_{t+i} 的估計值都將產生誤差。在圖 1 中，線型修正模型的估計式 $(\sum_{i=1}^k e^{(E(r_t)-d)(T-t-i)} \approx \sum_{i=1}^k \delta_t + (1 - e^{(r_t-d)(T-t)}) \times \frac{i}{T-t})$ 表現如直線 $\overline{AB'C'}$ ；另一方面，指數型修正模型的估計式 $(\sum_{i=1}^k e^{(r_t-d)(T-t-i)})$ 表示如曲線 ABC。

設時間點= t 時(起始點)，真實 δ 值為 A 點(可觀察)，且線型修正模型及指數型修正模型對 δ 值估計值亦位於 A 點，因此估計誤差為 0。當時間點= $t+1$ 時，無風險利率為 r_{t+1} ，設真實 δ_{t+1} 為 B"點(圖 1 中短虛線)，線型修正模型的估計誤差為 $\overline{B'B''}$ ；指數型修

正模型的估計誤差則為 $\overline{BB''}$ ，由此，線型修正模型將較指數型修正模型產生 $\overline{B'B}$ 超額誤差。當時間點 $=t+k$ 時，無風險利率為 r_{t+k} 且 $r_{t+k} > r_{t+1}$ ，真實 δ_{t+k} 即為 C'' 點(圖 1 中長虛線)¹¹，線型修正模型的估計誤差則為 $\overline{C'C''}$ ；指數型修正模型的估計誤差則為 $\overline{CC''}$ ，由此，指數估計模型明顯產生較大的估計誤差，其超額誤差為 $\overline{C'C}$ 。

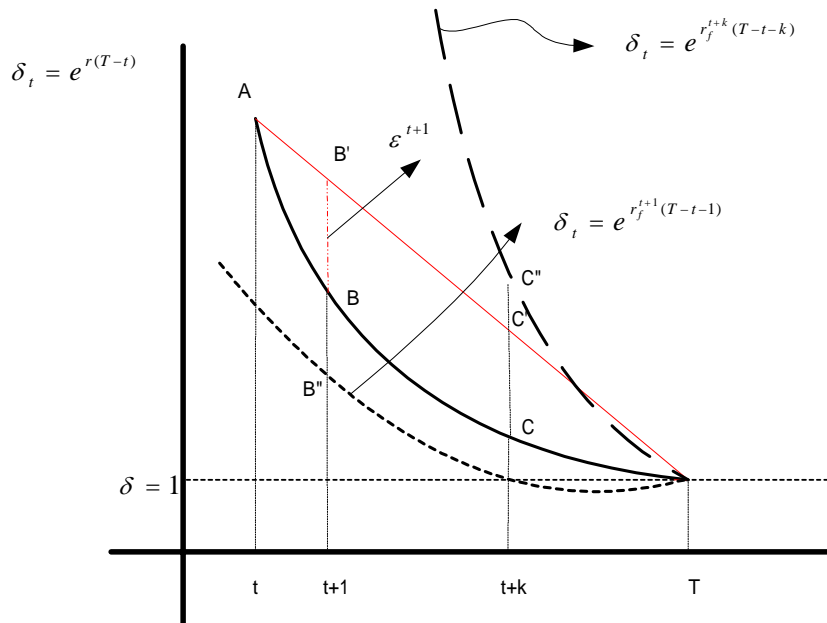


圖 1 線型修正模型及指數型修正模型對 δ 值估計誤差^a

註

a: 直線 $\overline{AB'C'}$ 及曲線 ABC 分別表示為線型修正模型、指數型修正模型對未來持有期間的 δ 估計值。

由以上分析可知， r 的變化方向，將決定線型修正模型及指數型修正模型的估計誤差。以下依不同變化方向進行討論。當 r 上升時，真實 δ 值曲線由平緩轉成較陡的曲線(如 $A \rightarrow C''$)，此時，線型修正模型將產生較小的估計誤差；反之，當 r 下滑時，真實 δ 值曲線由較陡轉為平緩的曲線($A \rightarrow B''$)，線型修正模型將較指數型修正模型產生較大的估計誤差。另外，當 r 下滑時，線型修正模型相對指數型修正模型所產生的超額誤差，將與 r 的水準呈正向關係，即當 r 趨近於零時，指數型修正模型及線型修正模型將產生相同的估計值(附錄)。

由以上分析可知，雖然當 r 呈現下降的情況，指數型修正模型會有較佳的估計結果，但亦隨 r 的逐步下降，指數型修正模型將與線型修正模型趨近，然而，當 r 為上漲的情況，線型修正模型會有較好的估計結果，同時隨 r 的逐步上漲，線型修正模型估計結果愈佳。

¹¹ δ_{t+k} 的大小與即期利率 r_{t+k} 的大小具有正相關，當 r_{t+k} 愈大，則 δ_{t+k} 愈大，且形成較陡的指數型函數。

2.5 模型檢測統計方法

本文將以 Kupiec(1995)的檢定統計方法，比較線型修正模型及指數估計模型的估計準確度是否優於傳統固定 δ 值的估計模型，及二個修正模型何者具有較高的適合度。

Kupiec(1995)提出真實損益穿透 VaR 值的機率(x/n)，即為錯誤率(failure rate)，其中 x 表示樣本外真實報酬穿透 VaR 值的次數， n 為樣本數，且 x/n 具有二項式分配特性，如式(22)所示。在虛無假設($H_0: p=p'$)成立的條件下，檢定統計量(LR)，如式(23)所示，將服從 $\chi^2_{1-\alpha}(1)$ 。此檢定方法稱為 PF 檢定(proportion of failures test)。

$$\text{binomial } [n, x](1-p)^{n-x} p^x \tag{22}$$

$$LR = -2\ln[(1-p)^{n-x} p^x] + 2\ln\{[1-(N/T)^{n-x} (N/T)^x]\} \tag{23}$$

一旦檢定統計量 $LR > \chi^2_{1-\alpha}(1)$ ，則拒絕虛無假設，表示檢測模型未達適合度的標準；否則，無法拒絕估計模型的適合度。

3. 實證結果與分析

3.1 研究標的

本研究選取 TAIEX 台股指數期貨(TXF)¹²、SGX-DT 摩根台指期貨(STW)、CME S&P500 指數期貨(SP)為標的，樣本資料為 June.1999~June.2004 到期前 2 個月的日收盤價。為了避免外匯風險的因素，每一期貨契約皆以結算貨幣做為計算基礎。契約規格如表 1 所示。無風險利率(r)則根據樣本區間各市場的一年定存利率做為 r 的代理因子¹³。

表 1 期貨契約之規則及實證資料區間

期貨契約	交易所	現貨指數代碼	契約規格每點價值	交割月份	資料區間
台灣股價指數期貨(TXF)	台灣期貨交易所 (TAIFEX)	TWSE	NT\$200	逐月	June.1999~June.2004
摩根台灣股價指數期貨(STW)	新加坡交易所 (SGX-DT)	TWY	USD\$100	逐月	June.1999~June.2004
S&P500 指數期貨(SP)	芝加哥商品交易所(CME)	SPX	USD\$100	季月	June.1999~June.2004

註: a: 本研究資料來源為彭博資訊(Bloomberg)。

¹² 括弧內標示契約英文代碼。

¹³ 資料來源：中華民國中央銀行、新加坡貨幣局、美國聯準會。

3.2 研究設計

期貨契約因到期日不同而有 1 種以上的契約同時交易的情形，為了解決上述問題，一般實證研究，以展約(Rollover)方式，建立連貫性的期貨價格。然而，以展約方式建構歷史資料，隱含期貨部位都會在當期契約到期前進行換約的動作，在實務操作上，該項假設不必然成立。為了符合實務運作情況，本文將不同交割月份的契約的報價資料點視為獨立區段，並獨立產生檢測值，最後將所有不同交割月份的契約所產生的獨立樣本進行整合，即構建所有檢測值之集合。

根據前文分析計算 VaR_F 相當 VaR_S 與 δ 的乘積。因此計算 VaR_F 首要必須先計算 VaR_S 。本文選擇以指數加權移動平均法(EWMA)做為計算 VaR_S 的估計模型¹⁴。首先將資料點區分成二部份，分別為樣內區間(in-sample)及樣外區間(out-sample)。在樣內區間保存 252 筆觀察資料點的條件下，以移動視窗的技巧在樣外區間產生 n 個持有期間 5 日的 VaR_S 估計值(n 值的大小視該月期貨契約的資料長度而定)。在估計 VaR_S 上，分別採用 1%、5% 二種顯著水準。

在 的估計上¹⁵，則分別採用傳統模型、線型修正模型及指數型修正模型。因此在實證的設計上，3 種 δ 估計模型，配合 2 種顯著水準($\alpha=1\%$ 、 5%)，表示每一期貨契約將產生 6 組(3 種 δ 估計模型 \times 2 顯著水準) VaR_F 估計值。

接著，將計算出的 VaR_F 與相同時點期貨的真實損益(R_F)進行比較，並依以下原則建立指標向量，即當真實損益低於風險值時，給予指數函數“1”的數值，否則為“0”。指標向量(I_i)定義如下：

$$I_i = \begin{cases} 1 & \text{if } R_{Fi} < VaR_i \\ 0 & \text{if } R_{Fi} \geq VaR_i \end{cases} \quad 16$$

最後，透過指標向量，計算模型的錯誤率(或穿透率)， $\frac{\sum_{i=1}^T I_i}{T}$ ，進而判定該模型是

否符合適合度的要求¹⁷。

VaR_F 在估計期貨契約風險值的誤差來源有二，分別為 VaR_S 值的估計誤差。為了判斷造成 VaR_F 估計誤差的主要來源，本文將採用 Kupeic(1995)的 PF 檢定方法同時對 VaR_S 及 VaR_F 估計值進行檢測，且將 VaR_F 、 VaR_S 的錯誤率進行比較，原則上二者的差異得視於模型對 值的估計誤差。

根據式(23)的 LR 檢測統計量，若檢測模型的 LR 值高於 3.84¹⁸，即拒絕虛無假設，表示模型無法準確估計出持有部位的風險暴露值；否則表示該模型符合適合度¹⁹。

¹⁴ EWMA 由 J.P. Morgan 銀行提出的 VaR 估計模型。(J.P. Morgan RiskMetrics, 1996)™。

¹⁵ 由於估計的皆為短期的風險值，由此在估計上忽略股利(d)對 δ 的影響。

¹⁶ 由於假設投資組合期初價值為 \$1，因此當期損益可以報酬率表示。

¹⁷ 在 $\alpha\%$ 的顯著水準估計出的風險估計值，報酬穿透該估計值的理論機率應為 $\alpha\%$ 。相反的，若風險值低估，則穿透率相對較高；若風險值高估，則穿透率相對較低，二者皆表示風險估計值的誤差具有顯著性。

¹⁸ 臨界值為自由度 1 的 $\chi^2(0.05) = 3.84$ 。

¹⁹ 虛無假設： $H_0: p = p'$ 。

3.3 實證結果

表 2 歸納指數期貨的標的現貨報酬的統計量，由偏態及峰態係數顯示台股現貨指數、摩根台股指數及 S&P500 指數，皆具有右偏及高狹峰的特性。由於 EWMA 模型的前題假設為報酬具常態分配，因此推測將 EWMA 模型應用在具有高狹峰及右偏的分配，將會產生低估現貨部位的風險值。此結果與表 3 列示 VaR_S 具有較高穿透率的現象一致，尤其當顯著水準為 $\alpha=1\%$ ，其低估的現象愈見明顯²⁰；而當 $\alpha=5\%$ ， VaR_S 穿透率大致仍符合理論誤差率。

接著，透過 值估計模型，將現貨指數之風險預估值線性轉換成期貨指數之風險預估值(VaR_F)。表 4 列示對 VaR_F 的檢測結果。由表 4 可知，傳統模型估計的 VaR_F 嚴重地的低估期貨風險值，且低估的現象甚於 VaR_S (表 3)。由於 VaR_F 的估計誤差的來源有二種，其一為 VaR_S 估計誤差，其二為 值的估計，由表 3 得知 EWMA 模型對非常態的報酬分配將產生低估 VaR_S 的現象，因此 VaR_F 扣除 VaR_S 的誤差，其餘的誤差則得以歸究於傳統模型假設 值於估計期間為固定常數，因而忽略期差變動風險所造成低估風險的第二種原因，同時 VaR_F 低估現象較 VaR_S 明顯，由此判斷傳統模型在 值估計誤差，為傳統模型誤差的主要來源。

相對的，線型修正模型及指數型修正模型所估計出的 VaR_F 準確度一致性地優於傳統模型。在統計檢定上，雖然修正模型的穿透率與理論誤差仍存在明顯的差距，即拒絕虛無假說($H_0:p=p$)，然而其估計值已明顯改善傳統模型低估風險的現象。以顯著水準 $\alpha=5\%$ 為例，傳統模型的穿透率高達 14.98%~17.89%，而修正模型的穿透率介於 2.13%~4.13%。同時配合 VaR_S 估計績效的檢測結果(表 3)，發現修正模型在 VaR_F 的估計誤差與 VaR_S 的誤差相近，由此判斷 VaR_F 的誤差大部份來自於 VaR_S 低估的結果，相反的， 值的估計誤差對 VaR_F 誤差的增量相對較小。綜合以上，修正模型在 值上表現上顯著優於傳統模型。

另外，在比較線型修正模型與指數型修正模型的績效，發現線型修正模型一致性的優於指數型修正模型。由此判斷，指數型修正模型固定利率的假設，可能是造成 VaR_F 產生較大估計誤差的主要原因之一。

表 2 現貨指數日報酬之統計量分析^a

	TWSE	TWY	SPX ^b
平均數	-0.03%	-0.03%	-0.03%
變異數	0.02	0.02	0.01
偏態係數	0.13	0.16	0.15
峰態係數	3.84	4.18	4.12

註:

- 表 2 根據樣本期間指數現貨的日收盤價，計算對數日報酬，即 $\log(S_t/S_{t-1})$ ，並進行統計量分析。
- 現貨指數分別為，台灣加權股價指數(TWSE)、摩根台股指數(TWY)及 S&P500 指數(SPX)。

²⁰ 高狹峰係數往往代表報酬分配具有厚尾的特性，因此對於依據報酬尾部分配(tail distribution)進行估計的 VaR 模型，往往會產生低估風險暴露值的現象。

表 3 現貨風險預估值(VaR_S)錯誤率之檢測分析^a

	TWSE	TWY	SPX
$\alpha=1\%$	2.32% ^{b*} (12.67)	1.86% ^{*c} (5.78)	2.13% [*] (9.56)
$\alpha=5\%$	6.24% (3.01)	6.00% (1.91)	5.16% (0.05)

註:

- 表 3 說明 VaR_S 的錯誤率。 VaR_S 估計值用來衡量未來 5 天現貨部位的最大損失估計值，顯著水準分別為 1%、5%。 VaR_S 估計模型採用 EWMA 模型。
- 該數值表示 VaR_S 錯誤率，其計算樣本外期間真實報酬穿透 VaR_S 的次數比率。括弧內數值表示 LR 值。
- *LR 值 > 3.84，表示在 5% 的顯著水準下，拒絕虛無假說， $H_0: P=P'$ ，其中 P =錯誤率， P' =理論錯誤率。

表 4 期貨風險預估值(VaR_F)錯誤率之檢測分析^a

	TXF	STW	SP
$\alpha=1\%$ ^b			
傳統型模型	16.92% ^{*c} (inf)	17.89% ^{*d} (inf)	14.98% [*] (545.44)
修正模型：			
(1)線型修正模型	2.82% [*] (22.25)	2.48% [*] (15.19)	2.13% [*] (9.56)
(2)指數型修正模型	4.13% [*] (55.13)	3.41% [*] (34.93)	2.43% [*] (14.57)
$\alpha=5\%$			
傳統型模型	25.28% [*] (inf)	26.58% [*] (inf)	24.80% [*] (inf)
修正模型：			
(1)線型修正模型	7.96% [*] (15.61)	6.83% [*] (6.12)	5.67% (0.89)
(2)指數型修正模型	9.67% [*] (36.21)	8.79% [*] (24.09)	6.78% [*] (5.97)

註:

- 表 4 說明 VaR_F 預測真實期貨部位損失的錯誤率。 VaR_F 估計值用來衡量未來 5 天期貨部位的最大損失值。
- α 值表示估計 VaR_F 採用之顯著水準，分別設定為 1%、5%。
- 該數值表示 VaR_F 錯誤率，其計算樣本外期間真實報酬穿透 VaR_F 的次數比率。括弧內數值表示 LR 值。
- *表示 LR 值 > 3.84，即在 5% 的顯著水準下，拒絕虛無假說， $H_0: P=P'$ ，其中 P =錯誤率， P' =理論錯誤率。

4. 結論

估計期貨風險值時，其估計誤差的來源有二：分別為現貨風險值的估計誤差，及將現貨風險值線性轉換為期貨風險值的係數值，即 δ 值的估計誤差。本文認為傳統模型假設估計期間 δ 值為固定值，將產生期貨及現貨風險值關係係數的誤設。由此本文的主

要目的即在修正該項誤差來源。並試圖重新建立期貨部位風險值估計式。

本文提出二種修正模型，分別為指數型修正模型及線型修正模型，其目的在修正傳統模型假設 δ 值為固定值，所忽略的基差風險值。另一方面，本文採用 J.P.Morgan 銀行的 EWMA 模型，估計現貨部位的風險值。在實證設計上，本文同時對期貨風險值與現貨風險值的準確度進行檢測，並比較期貨與現貨風險值誤差的差異，進而判斷不同模型對 δ 上所產生的估計誤差。

本文研究採用三種期貨契約，分別為台股指數期貨、摩根台股指數期貨及 S&P500 指數期貨。根據實證結果，發現上述期貨契約的標的現貨價格因具有高峰、右偏的特性，與 EWMA 估計模型假設價格報酬具常態分配不符，使得估計出的現貨風險值出現低估的現象。因此，透過線性關係係數將現貨風險值轉換為期貨風險值，亦將產生低估風險的現象，其中傳統模型低估風險值的現象尤其嚴重，且傳統模型估計出的期貨風險值的錯誤率明顯較現貨風險值高，顯示 δ 值估計誤差為造成傳統模型嚴重低估風險值的主要原因；相反的，修正模型所估計出的期貨風險值亦有低估風險的現象，然而相對傳統模型，修正模型明顯有較佳的估計績效，另一方面，當配合現貨風險值的估計誤差，說明修正模型的估計誤差實際上來自於 EWMA 模型對具厚尾特性的報酬分配所產生低估現貨風險值的現象。由此判斷，修正模型確實改善傳統模型對 δ 值的誤設。

最後比較二種修正模型：線型修正模型及指數型修正模型，發現線型修正模型一致性地優於指數型修正模型。由此判斷指數型模型固定利率值的假設，將會對預測 δ 值上產生較大的估計誤差。

綜合以上分析，不論採用線型修正模型或指數型修正模型預估值，修正後的期貨估計模型，其模型適合度明顯優於傳統模型。

附錄

設 $k=1$ ， δ 值的估計如下所示：

線型修正模型： $\hat{\delta}_{t+1} = \delta_t + (1 - \delta_t) \frac{1}{T-t}$ 。指數型修正模型： $\delta_{t+1} = e^{r(T-t)}$ 。二者估計誤差的差額如下所示：

$$\varepsilon^{t+1} = e^{r(T-t-1)} - (e^{r(T-t)} + (1 - e^{r(T-t)}) \times \frac{1}{T-t})$$

以一般式表示：

$$\begin{aligned} \varepsilon^{t+k} &= e^{r(T-t-k)} - (e^{r(T-t)} + (1 - e^{r(T-t)}) \times \frac{k}{T-t}) \\ &= e^{r(T-t)} (e^{-rk} - \frac{T-t-k}{T-t}) - \frac{k}{T-t} \end{aligned}$$

設定目標函數：

$$\text{Min } \varepsilon^{t+k} \Rightarrow e^{r(T-t)} (e^{-rk} - \frac{T-t-k}{T-t}) - \frac{k}{T-t}$$

對 r 進行一次偏微，求極值：

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varepsilon^k}{\partial r} &= \frac{\partial}{\partial r} (e^{r(T-t-k)} - e^{r(T-t)} (\frac{T-t-k}{T-t}) - \frac{k}{T-t}) \\ &\Rightarrow e^{r(T-t-k)} (T-t-k) - (\frac{T-t-k}{T-t}) e^{r(T-t)} (T-t) = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} e^{r(T-t-k)} (T-t-k) - e^{r(T-t)} (T-t-k) &= 0 \dots\dots\dots(A) \\ = e^{r(T-t)} (T-t-k) (e^{-rk} - 1) &= 0 \end{aligned}$$

由式(A)中可知，當 $e^{-rk} - 1 = 0$ ，則 $T-t-k=0$ ，為起始點及到期點。當 $T-t-k \neq 0$ (非起始點及到期點)，則 $e^{-rk} - 1 = 0 \Rightarrow r=0$ 。

根據以上的結果說明，在 $r \neq 0$ 時，指數型修正模型與線型修正模型唯有在當期及契約到期時，二者對 δ 的估計值相同。除此之外， $r=0$ ，亦會使得二者對 δ 的估計值相同。

參考文獻

1. Basle Committee on Banking Supervision (1994), *Risk Management Guidelines for Derivatives*, Basle, Switzerland :Bank for International Settlements.
2. Basle Committee on Banking Supervision (1995), *An Internal Model-Based Approach to Market Risk Capital Requirements*, Basle, Switzerland: Bank for International Settlements.
3. Basle Committee on Banking Supervision (1998), *Amendment to the Capital Accord to Incorporate Market Risks*, Basle, Switzerland: Bank for International Settlements.
4. Baumol, W. (1963), "An Expected Gain-Confidence Limit Criterion for Portfolio Selection," *Management Science*, 10, pp.174-182.
5. Copeland, T. and J. Weston, 1992, *Financial Theory and Corporate Policy*, 1st ed, New York: Wesley.
6. Dembo, R. (1997), "Value at Risk and Return," *The Electronic Journal of Financial Risk*.
7. Dowd, K. (1998), *Beyond Value at Risk: The New Science of Risk Management*, New York: Wiley.
8. Duffie, D. and J. Pan (1997), "An Overview of Value at Risk," *The Journal of Derivatives*, 7, pp.7-49.
9. Hull, J. (1998), *Introduction of Futures and Options Markets*, 3rd ed, New York: Prentice-Hall.
10. J. P. Morgan Bank (1996), *RiskMetrics - Technical Document* , 4th ed, New York: J. P. Morgan Bank.
11. Johansson, F., M. Seiler and M. Tjarnberg (1999), "Measuring Downside Portfolio Risk," *The Journal of Portfolio Management*, 26, pp.96-107.
12. Jorion, P. (1996), "Risk-Measuring the Risk in value at Risk," *Financial Analysis Journal*, 52, pp.47-56.
13. Jorion, P. (2000), *Value at Risk-The New Benchmark for Controlling Market Risk*, 1st ed, New York: McGraw-Hill.
14. Kupiec, P. (1995), "Techniques for Verifying the Accuracy of Risk Measurement Models," *Journal of Derivatives*, 2, pp.73-84.
15. Linsmeier, T. and N. Pearson (2000), "Value at Risk," *Financial Analysts Journal*, 56, pp.47-67.
16. Penza, P. and V. Bansal (2001), *Measuring Market Risk with Value at Risk*, 1st ed, New York: Wiley.
17. Working, H. (1949), "The Theory of the Price of Storage," *American Economic Review*, 39, pp.1254-1262.