管理科學研究 Vol.4, No.1, 2007 第 75-84 頁

考慮非瞬時到貨及允許延遲付款之二階段退化商品之訂購模型

An Ordering Policy for Non-instantaneous Deteriorating Items with Finite Replenishment Rate and Permissible Delay in Payment

莊鎧溫[1]　殷欣裕[2]

(Received: Apr. 22, 2007；First Revision: May. 22, 2007；Accepted: Jun. 22, 2007)

摘要

本研究建立了二階段退化性商品在非瞬時到貨及延遲付款條件下的存貨模型。在非瞬時到貨及延遲付款的情形下，補貨率和需求率為固定常數，並假設退化率為兩個階段。在存貨開始時，商品並不會有退化的情形發生，然而在一段時間之後，商品則會呈一個固定的退化率開始退化。在延遲付款方面分別探討兩個案例，文中對所建構的數理存貨模式利用傳統的最佳化原理找出最適的訂購策略，以使存貨相關總成本為最少。最後，舉例說明模式的求解過程並對各參數做敏感性分析。

關鍵字：二階段退化性商品、延遲付款、存貨模型、非瞬時到貨

Abstract

In this study, we establish an inventory model for non-instantaneous deteriorating items with allowable finite replenishment rate and permissible delay in payment. Under the situation, allowing finite replenishment rate and delay in payment, the replenishment rate and demand rate are constants, and we assume the deterioration rate divide to two stage. Beginning the model, the goods won' t deteriorate in this period, but after a constant time, the goods is starting deteriorate as a constant rate. We use two case to discuss the two situation of delay in payment. The optimal solution procedures for the present problems are provided. Numerical examples are presented to illustrate the models, and the sensitivity analysis of the optimal solution with respect to parameters of the systems are also carried out.

***Keywords*：** non-instantaneous deteriorating items、delay in payment、inventory model、finite replenishment rate

[1]南華大學管理科學研究所助理教授
[2]南華大學管理科學研究所研究生

1. 緒論(Introduction)

在企業的運作過程中，往往面臨許多存貨的決策問題。如何有效降低存貨成本，以提升企業獲利，遂成為企業運作過程不可或缺的重要環節。

在 Taylor III (1999, p.786)和 Stevenson (2002, p.556)文中提出，在傳統的 EOQ 模型中，大多假設補貨率為無限大，通常在補貨時間點瞬間到達最大的存貨量。但在實務上，訂購數量常受限於供應商的生產線產量問題或其它生產因素，導致貨品需分批送達；此時，補貨率將大於需求率，使存貨數量逐漸累積，直到訂購量全數送達為止，這種訂購模式我們稱之為非瞬時到貨之經濟訂購量模型。

商品的儲存往往會發生退化現象。隨著時間的變化，商品可能會腐壞、陳舊或超過既定的保存期限，導致商品無法販售，並產生額外處理成本的問題，稱之為退化成本。在 Ghare 和 Schrader(1963)的模型中，首先探討固定退化率的概念，但不允許缺貨。Wu el al. (2006)中則加入了商品二階段退化的模型，並考慮缺貨的情形，在儲存的初期，商品不會發生退化，在經過一個時間點後則呈一個常數的退化率產生退化。此外，Heng el al.(1991)、Bhunia 和 Maiti(1997)、Wee(1995,1997)皆探討了在不同狀況下，退化性商品的存貨模型。

一般而言，供應商將商品賣給零售商在賣出的同時收到貨款，但在實務上通常零售商不會馬上付款而是使用支票或是與供應商協議付款的期限，大多是在收到商品過後一段時間才會付款，這就是延遲付款的概念。首先由 Haley&Higgins(1973)提出延遲付款條件下之經濟訂購量批量研究。Goyal (1985)考慮在允許延遲付款條件下，建立含有利息的支付與賺取之存貨模型，即在貨款尚未支付之前，零售商可利用已售出之產品所取得的現金賺取利息；但貨款付清之後，零售商則需支付未售出之產品資金積壓成本的利息。Aggaewal and Jaggi(1995)將延遲付款的概念延伸到退化性商品模型，且不允許缺貨。Liao el al. (2000)則是將退化性商品在不允許缺貨及通貨膨脹的情形下之模型，加入延遲付款的概念。在 Liao(2007)的研究中，則是在允許延遲付款的狀況下，建立了非即時到貨之退化性商品之存貨模型。

由此，本研究欲探究在非瞬時到貨及允許延遲付款的情形下，商品呈二階段退化之存貨模型。根據以上文獻，我們假設了一個固定的補貨率及需求率與二階段的退化率，文中對所建構的數理存貨模式利用傳統的最佳化原理找出最適的訂購策略，以使存貨相關總成本為最少。最後，舉例說明模式的求解過程並對各參數做敏感性分析。

2. 基本假設及符號說明(Fundamental assumptions and notations)

在建立存貨模型之前，本研究做了以下的假設：

(1) 需求為一已知之固定常數。

(2) 不允許缺貨。

(3) 探討單一產品在固定期間存貨情況。

(4) 在時間 t_d 之前商品不會退化，時間 t_d 之後商品開始退化，退化率 θ 為一固定函數($0 \leqq \theta \leqq 1$)

(5) 在延遲付款期限前獲得利息收入，反之則有利息支出。
(6) 週期於商品銷售完時結束。
(7) 期初有設置成本 S。
(8) 訂購之商品為非瞬時到貨。
(9) 支付資金積壓成本之利率大於資金賺取之利率
(10) 所耗損的貨品無法替換和修補

本研究中所使用之符號如下：

D	需求率(units/unit time)
θ	退化率 $(0\leqq\theta\leqq1)$
P	銷售價格($/unit)
R	補貨率
$I(t)$	商品於時間 t 時的存貨水準
I_{max}	最大的存貨水準
T	週期時間
t_d	退化開始時間
M	延遲付款期限
S	設置成本($/cycle)
C_h	持有存貨成本($/ unit)
C_D	存貨退化成本($/ unit)
C_p	商品成本($/ unit)
I_e	資金賺取之利率($/ unit)
I_c	支付資金積壓成本之利率($/ unit)
TI_e	總利息收入
TI_C	總利息支出

3. 模型發展(Model formulation)

首先根據本研究的假設，繪出商品存貨水準與時間之關係圖，如圖 1 所示。

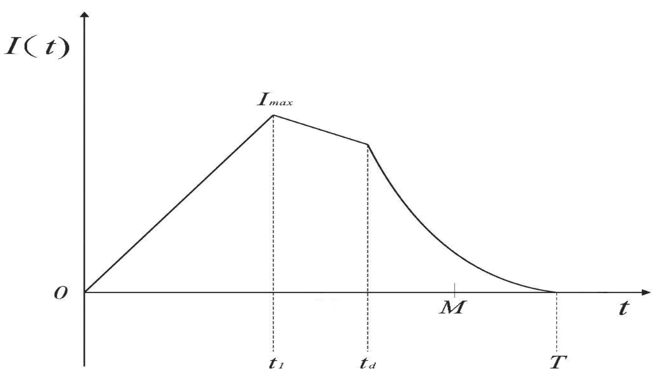

圖 1 非瞬時到貨及允許延遲付款之二階段退化商品訂購模型

在時間[0,T]期間之存貨水準，我們可以用下列方程式描述

$$\frac{dI_1(t)}{dt}=R-D \qquad 0\le t\le t_1 \tag{1}$$

$$\frac{dI_2(t)}{dt}=-D \qquad t_1\le t\le t_d \tag{2}$$

$$\frac{dI_3(t)}{dt}=-D-qI_3(t) \qquad t_d\le t\le T \tag{3}$$

代入其邊界條件 $I_1(0)=0$, $I_2(t_1)=I_{\mathrm{MAX}}$, $I_3(T)=0$，後解微分方程式可得

$$I_1(t)=t(R-D) \qquad 0\le t\le t_d \tag{4}$$

$$I_2(t)=I_{\max}+(-t+t_1)D \qquad t_1\le t\le t_d \tag{5}$$

$$I_3(t)=-\frac{e^{-tq}(e^{tq}-e^{Tq})D}{q} \qquad t_d\le t\le T \tag{6}$$

當 $t=t_1$ 時 $I_1(t_1)=I_2(t_1)$，帶入公式(4)、(5) 可求得最大存貨水準 I_{max}

$$I_{\max}=Rt-t_1D \tag{7}$$

在此可求得 t_1 與 T 之關係式，在 $t=t_d$ 時，$I_2(t_d)=I_3(t_d)$，帶入公式(5)、(6)如下：

$$t_1=\frac{D}{Rq}\left(e^{(T-t_d)q}+t_dq-1\right) \tag{8}$$

可知，t_1 為 T 的函數。

與商品相關之成本項目如下：

持有成本為

$$\begin{aligned}HC&=C_h\left(\int_0^{t_1}t(R-D)dt+\int_{t_1}^{t_d}(t_1(R-D)+(-t+t_1)D)dt+\int_{t_d}^{T}\frac{(-1+e^{(-t+T)q})D}{q}dt\right)\\&=C_h\left(-\frac{Rt_1^2}{2}+Rt_1t_d-\frac{t_d^2D}{2}+\frac{(-1+e^{(-t_d+T)q}+t_dq-Tq)D}{q^2}\right)\end{aligned} \tag{9}$$

退化成本

退化發生在 t_d 到 T 間，總退化成本為

$$DC = C_D(t_1(R-D)+(-t_d+t_1)D-\int_{t_d}^{T} Ddt)$$
$$= C_D(t_1(R-D)+(-t_d+t_1)D+t_dD-TD) \qquad \textbf{(10)}$$
$$= C_D(Rt_1-TD)$$

本研究考慮延遲付款，在利息部分此分為三個案例探討：

Case 1　$t_1<M<t_d$

在考慮延遲付款的模式下，若在期限前將商品售出，可獲得利息所得，但若過了此期限，為將商品售出，則必須支付商品積壓之利息如圖 2 **所示。**

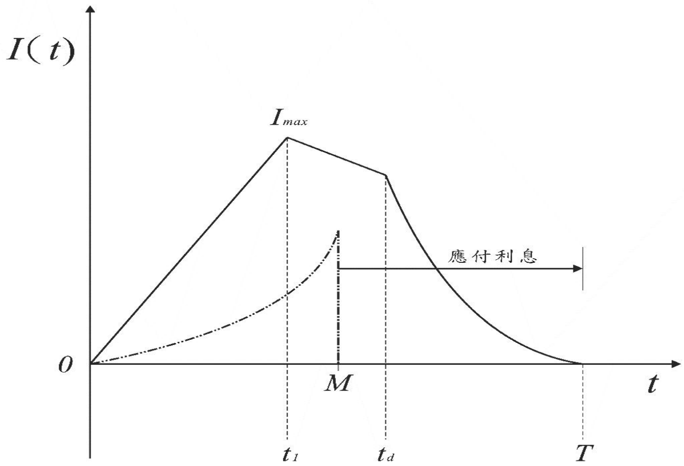

圖 2 **延遲付款期間支付及賺取之利息**

延遲付款期限小於退化開始時間，此時會有利息支出及利息收入

總利息支出為

$$TI_C = C_pI_c(\int_M^{t_d}(t_1(R-D)+(-t+t_1)Ddt+\int_{t_d}^{T}\frac{(-1+e^{(-t+T)q})D}{q}dt) \qquad \textbf{(11)}$$
$$= C_pI_c(Rt_1(-M+t_d)+\frac{q(-2T+M^2q+t_d(2-t_dq)))D}{2q^2})$$

總利息收入為

$$TI_e = PI_e(\int_0^M Dtdt) = \frac{1}{2}I_eM^2PD \qquad \textbf{(12)}$$

總成本(TC_1)=**設置成本**(S)＋**持有成本**(HC)＋**退化成本**(DC)＋**總利息支出**(TIc)-**總利息收入**(TIe)

$$TC_1 = S + C_h\left(-\frac{Rt_1^2}{2} + Rt_1 t_d - \frac{t_d^2 D}{2} + \frac{(-1+e^{(-t_d+T)q} + t_d q - Tq)D}{q^2}\right) + C_D(Rt_1 - TD)$$
$$+ C_p I_c\left(Rt_1(-M + t_d) + \frac{q(-2T + M^2 q + t_d(2 - t_d q)))D}{2q^2}\right) - \frac{1}{2} I_e M^2 PD \qquad \textbf{(13)}$$

再將總成本除以時間，即可求得各平均單位成本

$$TVC_1 = TC_1 / T \qquad \textbf{(14)}$$

Case 2 $t_d < M \leqq T$

在考慮延遲付款的模式下，若在期限前將商品售出，可獲得利息所得，但若過了此期限，為將商品售出，則必須支付商品積壓之利息如圖 3 所示。

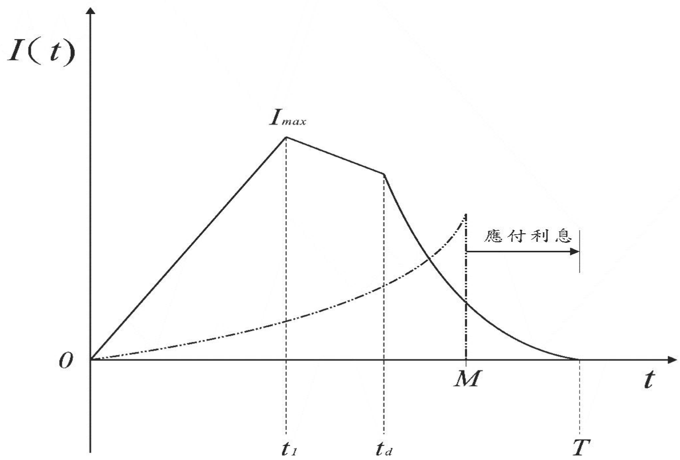

圖 3 延遲付款期間支付及賺取之利息

延遲付款限期小於商品售完之時間，此時會有利息支出及利息收入

總利息支出為

$$TI_C = C_p I_c\left(\int_M^T \frac{-1+e^{(-t+T)q}}{q} dt\right) = \frac{C_p I_c(-1+e^{(-M+T)q} + Mq - Tq)D}{q^2} \qquad \textbf{(15)}$$

總利息收入為

$$TI_e = PI_e\left(\int_0^M Dtdt\right) = \frac{1}{2} I_e M^2 PD \qquad \textbf{(16)}$$

總成本(TC_2)=設置成本(S)＋持有成本(HC)＋退化成本(DC)＋總利息支出(TIc)-總利息收入(TIe)

$$TC_2 = S + C_h(-\frac{Rt_1^2}{2} + Rt_1t_d - \frac{t_d^2 D}{2} + \frac{(-1+e^{(-t_d+T)q} + t_d q - Tq)D}{q^2}) + C_D(Rt_1 - TD) + \frac{C_p I_c(-1+e^{(-M+T)q} + Mq - Tq)D}{q^2} - \frac{1}{2} I_e M^2 PD \quad \textbf{(17)}$$

再將總成本除以時間，即可求得各平均單位成本

$$TVC_2 = TC_2 / T \quad \textbf{(18)}$$

Case 3　$T<M$

在考慮延遲付款的模式下，延遲付款期限大於商品售完期間，則可於週期期間內享有全週期之利息收入外，亦可持續賺取利息直到付款期限結束為止如圖 4 所示。

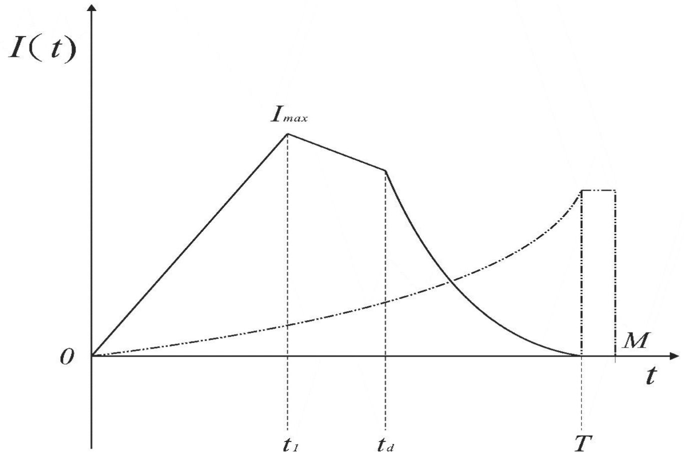

圖 4　延遲付款期間賺取之利息利息

延遲付款限期大於於商品售完之時間，此時會有總利息收入為

$$TI_e = I_e(\int_0^T Dtdt + (M-T)DT)P = \frac{1}{2} I_e(2M-T)TPD \quad \textbf{(19)}$$

總成本(TC_3)=**設置成本**(S)**＋持有成本**(HC)**＋退化成本**(DC) -**總利息收入**(TI_e)

$$TC_3 = S + C_h(-\frac{Rt_1^2}{2} + Rt_1t_d - \frac{t_d^2 D}{2} + \frac{(-1+e^{(-t_d+T)q} + t_d q - Tq)D}{q^2}) + C_D(Rt_1 - TD) - \frac{1}{2} I_e(2M-T)TPD \quad \textbf{(20)}$$

再將總成本除以時間，即可求得各平均單位成本

$$TVC_3 = TC_3 / T \quad \textbf{(21)}$$

找出最佳解之必要條件，首先要找出決策變數，在本研究中，決策變數為 T**，因此我們必須將總變動成本函數** TVC **對** T **進行一階微分，並令其為零。即**

$$\frac{\partial TVC}{\partial T}=0 \tag{22}$$

為確認所得之結果為最佳解，在此對 $TVC(T)$**對** T **進行二次微分，並代入** T^***，若滿足以下條件，則可確認** $TVC(T^*)$**為最小化之總變動成本：**

$$\frac{\partial^2 TVC}{\partial T^2}>0 \tag{23}$$

4. 數值範例(Numerical examples)

本研究假設參數如下 S=250，C_h=3，C_D=5，C_p=15，P=25，t_d=90/365 =0.24658，M=75/365=0.20548，Ie=0.05，Ic=0.12，R=2500，D=1500，θ=0.1。**首先將變動總成本** TVC **對** T **做一階微分，並令其為零，可找出極值。再進行二階微分，確認所求之變動總成本為最小值，若其大於零，則可確認為最佳解。**

代入以上參數值後，解(8)、(22)**式可得** t_1*= 0.18128、T*=0.30198，**再將以上參數代入** $TVC(T^*)$**中，可求出最佳總變動成本** TVC***為** 848.723。

為確認所得之結果為最佳解，在此對 $TVC(T)$**對** T **進行二次微分，證明其結果大於零，因此可以確認當** t_1*= 0.18128、T*=0.30198 **時，有最小總變動成本為** 848.723。

案例二承以上數值，唯 $M>t_d$ **故調整** M **為** 150/365=0.410959，**經求解得** t_1*= 0.216772、T*=0.360634。**但本案例之** $M>T^*$，**與假設不符，故無可行解。**

案例三承以上數值，其中 $M>T$。**將**(21)**式對** T **進行一階微分，並令其為零，可求得最佳** t_1*= 0.210665、T*= 0.350566，**最小變動總成本** TVC***為** 598.85。**比較上述之結果，可以發現當延遲付款期限越長，總變動成本越低，因此可得知當** $M>T$ **時可得最小的變動總成本** TVC。

由上述可得在案例一與案例三有最佳解，在比較其變動總成本大小後，選擇較小的變動總成本，故當延遲付款期限在銷售期間後可得最小之變動總成本。

5. 敏感度分析(Sensitivity analysis)

為探討在模型中各參數對總成本的影響及其變動情形，在不改變其它參數的情況下，針對各參數進行調整，找出其變化對總成本的影響。在進行敏感度分析前，其參數之設定如下：S=250，C_h=3，C_D=5，P=25，t_d=90/365 =0.24658，M=150/365=0.410959，Ie=0.05，R=2500，D=1500，θ=0.1，**分析結果如表** 1。

表 1 **敏感度分析**

Changing parameter	Change(%)	Change in t_1^*(%)	Change in T^*(%)	Change in TVC^*(%)
Ie	**+50**	**-9.19**	**-9.12**	**-38.14**
	+25	**-4.93**	**-4.89**	**-18.79**
	0	**0**	**0**	**0**
	-25	**5.80**	**5.74**	**18.06**
	-50	**12.76**	**12.62**	**35.27**
$\boldsymbol{\theta}$	**+50**	**-2.03**	**-2.07**	**0.95**
	+25	**-1.05**	**-1.07**	**0.48**
	0	**0**	**0**	**0**
	-25	**1.13**	**1.16**	**-0.52**
	-50	**2.34**	**2.40**	**-1.08**

表 1 **敏感度分析**(**續**)

Changing parameter	Change(%)	Change in t_1^*(%)	Change in T^*(%)	Change in TVC^*(%)
P	**+50**	**-9.19**	**-9.13**	**-38.21**
	+25	**-4.93**	**-4.89**	**-18.79**
	0	**0**	**0**	**0**
	-25	**5.80**	**5.74**	**18.06**
	-50	**12.76**	**12.62**	**35.27**

6. 結論(Conclusions)

在本研究中，探討了二階段退化性商品在非瞬時到貨及延遲付款條件下的存貨模型。在實務上，我們可以發現，有許多的商品在進貨之初，並不會有退化的情形，而是在經過一段時間後，才開始發生退化。是以本研究針對這些產品，並加入延遲付款的概念，推演出最小化成本模型。由數值範例中可以得知，當延遲付款期限大於銷售期間廠商可以得到一最小的總變動成本，對於廠商而言是比較有利的，從敏感度分析中可以得知，當資金賺取之利率(Ie)**增加，總變動成本**(TVC)**將隨之減少；而退化率**(θ)**增加時，總變動成本**(TVC)**亦隨之增加。**

本文在探討的過程中，雖然做了一些先決條件下的假設以方便研究，相信在現今快速變動且複雜的環境中，仍能提供一定的參考價值。在後續研究上，可以考慮加入缺貨情況、隨時間變動的需求、退化率服從二參量的韋伯分配等重要參數，使模型更貼近實務上的需求。

參考文獻

1. Aggaewal ,S.P.and Jaggi,C.K.,(1995), "Ordering polices of deteriorating items under permissible delay in payment," *Journal of the Operational Research Society*, Vo l.46, pp.458-462
2. Bhunia A. K., Maiti M., (1997), "Deterministic inventory model for deteriorating items with finite rate of replenishment dependent on inventory level ," *Computer & Operations Research*, Vol. 25, Issue 11,pp. 997-1006.
3. Ghare, P.M., Schrader, G.H. (1963), "A model for exponentially decaying inventory system," *International Journal of Production Research 21*, pp.449-460.
4. Goyal, S. K. (1985), "Economic order quantity under conditions of permissible delay in payments," *Journal of the Operational Research Society*, Vol. 36, No. 4, pp. 335-339.
5. Haley, C.W.,and Higgins, R.C. (1973), "Inventory policy and trade credit financing ," *Management Science*,Vol.20, pp.464-471.
6. Heng, K. J., Labban, J. and Linn, R. J. (1991), " An order- level lot-size inventory model for deterioration items with finite replenishment rate ," *Computer & Industrial Engineering*, Vol. 20, pp. 187-197.
7. Liao, H.C., Tsai C.H. and Su, C.T.(2000), " An inventory model with deteriorating items under inflation when a delay in payment is permissible ," *International Journal Production Economics*, 101, pp.369-384.
8. Liao J. J., (2007), "On an EPQ model for deteriorating items under permissible delay in payments ," *Applied Mathematical Modelling*, Vol31, pp. 393 – 403.
9. Stevenson, W. J. (2002), *Operations Management*, McGraw-Hill, New York.
10. Taylor III, B. W. (1999), *Introduction to Management Science*, Prentice-Hall, New Jersey.
11. Wee, H. M. (1995), "A deterministic lot-size inventory model for deteriorating items with shortages and a declining market ," *Computers & Operations Research*, Vol. 22, pp. 345-356.
12. Wee, H. M. (1997), "A replenishment policy for items with a price-dependent demand and a varying rate of deterioration ," *Production Planning & Control*, Vol. 8, pp. 494-499.
13. Wu K.S., Ouyang L.Y. and Yang C.T.(2006)., "An optimal replenishment policy for non-instantaneous deteriorating items with stock-dependent demand and partial backlogging ," *International Journal Production Economics*, 101, pp. 369-384.