需求與存貨水準相關之退化性產品的最適生產策略

The Optimal Production Policy with Stock-dependent Demand for Deteriorating Items

蔡美賢[1]

(Received: Apr. 25, 2008；First Revision: May. 29, 2008；Accepted: Jun. 10, 2008)

摘要

如何控制與擬定退化性產品之存貨策略已成為現代組織中之決策者須面對的重要問題。本研究針對需求與存貨水準相關之退化性產品，研究在經濟生產批量模式下，製造商應如何決定最適生產週期。為反映多數產品之展示或儲存空間為有限的事實，本文假設產品展示或儲存空間是有限制的，並據以構建一數學模式，以探討追求利潤最大下的經濟生產批量模式。接者，在定理 1 及定理 2 中闡述若干在管理上直覺且合理的結果。最後，藉由數值案例的討論驗證模式的適用性。

關鍵詞：生產、存貨、批量、退化

Abstract

This article deals with the problem of determining the optimal run time for an economic production quantity (EPQ) model with deteriorating items. The limited display area is assumed to reflect the fact that most manufacturer’s outlets have limited shelf space in the proposed model. A mathematical model is formulated to manifest the extended EPQ model for maximizing profits. Theorems 1 and 2 are established to show several intuitively reasonable managerial results. Finally, two numerical examples are given to demonstrate the applicability of the proposed model.

***Keywords*: **Production、Inventory、Lot Sizing、Deterioration

[1]中國文化大學國際企業管理研究所博士生及北台灣科學技術學院國際貿易系講師

1. 引言

傳統的存貨模式假設存貨減少乃起因於固定的需求率，然而在真實生活的情境中，由於產品退化所導致的損失，亦是存貨量降低的重要原因。因此，如何控制與擬定退化產品之存貨策略已成為現代組織中之決策者須面對的重要問題。在過去幾十年中，很多研究者已致力於退化性產品的存貨模式之研究，如易揮發的液體(volatile liquids)、血液銀行(blood banks)、 藥物(medicines)、電子產品(electronic items) 以及流行商品(fashion goods)。1963 年 Ghare 與 Schrader 首先提出產品壽命為指數分配之退化性產品的存貨模式；接著，1973 年 Covert 與 Philip 推廣 Ghare 與 Schrader 的模式，將產品壽命分配假設為兩個參數的 Weibull 分配；後續，如 Aggarwal (1978)， Dave 與 Patel (1981)，Hariga (1996)，及 Goyal 與 Giri (2001)等亦提出一些令人關注有關退化性產品之存貨模式的論文。

1972 年 Levin 等人觀察到：「在超級市場陳列大量消費產品可誘使消費者買的更多」；1982 年 Silver 與 Peterson 指出：零售業的銷售量與陳列的存貨量成正比。為了顯示銷售量與存貨量的關係，1988 年 Baker 與 Urban 建立了需求量為存貨水準之冪函數的 EOQ 模式(即在時間 t 的需求量 $D(t) = \alpha[I(t)]^{\beta}$，其中 $I(t)$為存貨水準，$\alpha > 0$ 且 $0 < \beta < 1$)；1989 年 Mandal 與 Phaujdar 接著提出：需求率為存貨水準的線性函數的存貨模型(即 $D(t) = \alpha + \beta I(t)$, 其中$\alpha$和$\beta$皆大於 0)；接著，1990 年 Datta 與 Pal 提出另一種存貨模型：需求率為存貨水準之冪函數，但當存貨水準降至 L 後，需求率成一固定常數(即 $D(t) = \alpha[I(t)]^{\beta}$，若 $I(t) > L$，而 $D(t) = \alpha L^{\beta}$, 若 $0 \le I(t) \le L$)；1992 年 Urban 修正 Datta 與 Pal 於 1990 年提出之模型，將訂貨週期之終點存貨量為零的限制放寬；Bar-Lev 等人在 1994 年提出在隨機條件下，需求與存貨水準相關的 EOQ 推廣模型，1997 年 Ray 和 Chaudhuri 將貨幣的時間價值及通貨膨脹率列入考慮，將模式推廣為允許缺貨的 EOQ 模型；2000 年 Chung 等人推導出在單位時間利潤極大下，決定最佳策略的充要條件。其他相關論文還有：Chang(2004)，Padmanabhan Vart(1995)，Pal 等人(1998)等等。

為能反映出大部分產品之貨架空間為有限的事實，在本文的模式中假設存在一最大存貨水準。根據上述假設與說明，建立一數學模型來探討獲得最大總利潤之退化性產品的經濟生產批量（EPQ）模型。此外，在定理 1 及定理 2 中闡述若干在管理上直覺且合理的結果。最後，藉由數值範例的討論驗證模式的適用性。

2. 假設與符號

本文的假設如下:

1. 需求與存貨水準成線性關係。
2. 不允許因缺貨而喪失銷售量。

3. S 為展示貨品的最大容許量。

4.存貨水準的起始值及終點值不必限制為零。假設起始值及終點值相等，使生產週期可重複進行。

5.每單位時間的產品退化率是固定的，且退化性產品是不能替代及修復。

本文採用以下符號：

t_1：生產時間（t_1 為決策變數)。

T：生產存貨週期，$T = t_1 + t_2$，t_2 為不生產的時間。

K：固定的生產速率。

θ：固定的退化率，$0<\theta<1$。

$I(t)$：在時間 t 的存貨水準，$I(t) \leq S$。

Q：起始及最終存貨水準，$0 \leq Q \leq S$ (Q 為決策變數).

$D(t)$：在時間 t 的需求率，本文假設存貨水準 $D(t)$ 為 $I(t)$的線性函數，即 $D(t) = \alpha+\beta I(t)$，其中α 及 β為非負常數。

c_o：每次的設置成本。

c_p：每單位產品的生產成本。

c_h：單位時間每單位產品的持有成本。

p：每單位產品的獲利 (即 $p= p_s - c_p$，p_s 為單位產品的銷售價格)。

P：最高的存貨水準。

AP：在$[0, T]$區間之平均利潤。

3. 數學模型和分析

時間 $t=0$ 時以固定的生產率 K 生產，同時進行銷售，直至 $t= t_1$時存貨水準達到最高點 P ($P\leq S$)，且停止生產。從 $t= t_1$ 至 $t= t_1+t_2$ 間只單純銷售，在此期間存貨水準因銷售及產品退化逐漸降低，在 $t= t_1+t_2$ 時存貨水準降至 Q，此存貨系統以圖 1 表示。

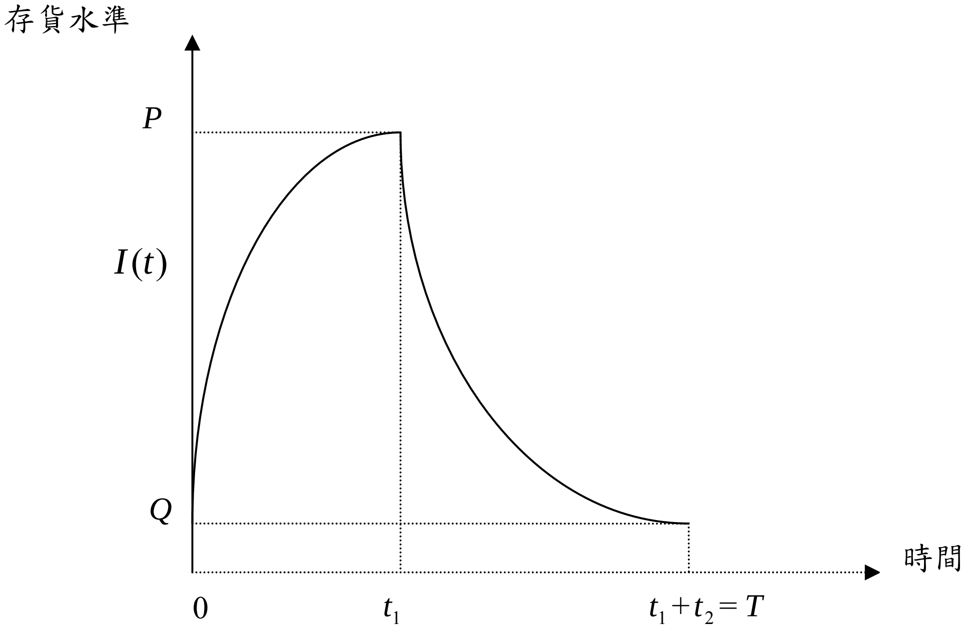

圖 1 存貨系統展示圖

本文的目標在決定最適的t_1 和 Q 值(分別以 t_1^* 和 Q^*表示) 使得每單位時間之平均利潤最大。根據上述之假設及說明，可得存貨水準 $I(t)$滿足下列微分方程：

$$I'(t)+\theta I(t)=K-D(t), \qquad 0 \le t \le t_1 \text{，} \tag{1}$$

和

$$I'(t)+\theta I(t)=-D(t), \qquad t_1 \le t \le t_1+t_2 \text{，} \tag{2}$$

其邊界條件$I(0)=Q$，$I(t_1)=P$，與$I(t_1+t_2)=Q$。利用方程式(1) 與 (2)可分別得：

$$I(t)= Qe^{-(\theta+\beta)t} + \frac{K-\alpha}{\theta+\beta}\left(1-e^{-(\theta+\beta)t}\right), \qquad 0 \le t \le t_1 \text{，} \tag{3}$$

和

$$I(t)= Qe^{(\theta+\beta)(t_1+t_2-t)} + \frac{\alpha}{\theta+\beta}\left(e^{(\theta+\beta)(t_1+t_2-t)}-1\right), \qquad t_1 \le t \le t_1+t_2 \text{。} \tag{4}$$

利用$I(t_1)=P$和方程式(3)與 (4)，可得

$$\left(Q-\frac{K-\alpha}{\theta+\beta}\right)e^{-(\theta+\beta)t_1}+\frac{K-\alpha}{\theta+\beta}=\left(Q+\frac{\alpha}{\theta+\beta}\right)e^{(\theta+\beta)t_2}-\frac{\alpha}{\theta+\beta} \text{，} \tag{5}$$

由方程式(5)顯示t_2是t_1的函數，可表示為

$$t_2=\frac{1}{\theta+\beta}\ln\left[\frac{K}{Q(\theta+\beta)+\alpha}-\frac{K-(Q(\theta+\beta)+\alpha)}{Q(\theta+\beta)+\alpha}e^{-(\theta+\beta)t_1}\right] \text{。} \tag{6}$$

對t_1微分，可得

$$\frac{dt_2}{dt_1} = \left[\frac{K-(Q(\theta+\beta)+\alpha)}{Q(\theta+\beta)+\alpha}e^{-(\theta+\beta)(t_1+t_2)}\right] > 0 。 \tag{7}$$

由方程式(1)中得知，當 $t \le t_1$ 時，$K > \alpha + (\beta+\theta) I(t)$。 顯示 $K > \alpha + (\beta+\theta) I(0) = \alpha + (\beta+\theta)Q$。利用方程式(5)，可得到在$[0, T]$區間之平均利潤

$$AP = \{ p\int_0^T D(t)\,dt - c_0 - (c_h + \theta c_p) \int_0^T I(t)\,dt \} / T$$

$$= p\alpha + \{- c_0 + (p\beta - c_h - \theta c_p)\left[\frac{K-\alpha}{\theta+\beta}t_1 - \frac{\alpha}{\theta+\beta}t_2\right]\} / \mathrm{T} 。 \tag{8}$$

對 AP 取t_1之一階導數，結果如下：

$$\partial AP/\partial t_1 = \frac{1}{T^2}[c_0(1+\frac{dt_2}{dt_1}) + (p\beta - c_h - \theta c_p)(\frac{K}{\theta+\beta})(t_2 - t_1\frac{dt_2}{dt_1})] 。 \tag{9}$$

由$(p\beta - c_h - \theta c_p)$的數值大小，可分為以下兩種狀況來探討如何求得最適解t_1^*。

狀況 1: $(p\beta - c_h - \theta c_p) \ge 0$

當 $p\beta \ge c_h + \theta c_p$ 時，顯示單位的獲利($p\beta$)高於單位的成本$(c_h + \theta c_p)$，表示存貨是有利的。此外，若$(p\beta - c_h - \theta c_p) \ge 0$，則$\partial AP / \partial t_1 > 0$，表示當$I(t) \le S$ 時，AP 為t_1的遞增函數，因此，$I(t_1) = S$ 或 $P = S$，利用方程式(5)可得：

$$t_1 = \frac{-1}{\theta+\beta}\ln\left(\frac{(K-\alpha)-S(\theta+\beta)}{(K-\alpha)-Q(\theta+\beta)}\right), \tag{10}$$

且

$$t_2 = \frac{1}{\theta+\beta}\ln\left(\frac{S(\theta+\beta)+\alpha}{Q(\theta+\beta)+\alpha}\right) 。 \tag{11}$$

將方程式(10) 與(11) 代入方程式 (8)，得知 AP 僅為 Q 的函數。求得最適Q^*的一階條件為 $dAP/dQ = 0$，由此導出

$$\frac{-c_0(\theta+\beta)}{(p\beta - c_h - \theta c_p)} = \left[\left(\frac{K-\alpha}{\theta+\beta} - Q\right) \ln\left(\frac{(K-\alpha)-S(\theta+\beta)}{(K-\alpha)-Q(\theta+\beta)}\right) + \left(Q + \frac{\alpha}{\theta+\beta}\right) \ln\left(\frac{S(\theta+\beta)+\alpha}{Q(\theta+\beta)+\alpha}\right) \right] 。 \tag{12}$$

為確認方程式(12)是否有解，

$$F(Q)=\left(\frac{K-\alpha}{\theta+\beta}-Q\right)\ln\left(\frac{(K-\alpha)-S(\theta+\beta)}{(K-\alpha)-Q(\theta+\beta)}\right)+\left(Q+\frac{\alpha}{\theta+\beta}\right)\ln\left(\frac{S(\theta+\beta)+\alpha}{Q(\theta+\beta)+\alpha}\right)。\tag{13}$$

對 $F(Q)$取 Q 之一階導數，可得：

$$F'(Q)=-\ln\left(\frac{(K-\alpha)-S(\theta+\beta)}{(K-\alpha)-Q(\theta+\beta)}\right)+\ln\left(\frac{S(\theta+\beta)+\alpha}{Q(\theta+\beta)+\alpha}\right)>0。\tag{14}$$

由於 $F(S)=0$，利用方程式(14)得知在 $Q=S$ 時 ，$F(Q)$的值小於 0 且嚴格遞增至 0。因此，可得以下結果：

定理 1 ：若 $(p\beta-c_h-\theta c_p)\ \geq\ 0$，則最適生產時間 t_1^* 滿足 $I(t_1^*)=S$，且得到以下結果:

(1)若 $F(0)\ \leq\ -c_0(\theta+\beta)/\ (p\beta-c_h-\theta c_p)$，則在方程式(12)中存在一個唯一解 Q^*，使得方程式(8)中之 AP 達到最大。

(2)若 $F(0)>-c_0(\theta+\beta)/\ (p\beta-c_h-\theta c_p)$，則 $Q^*=0$。

證明：利用方程式(8)、(12)、(13)及(14)即可得證。

狀況 2: $(p\beta-c_h-\theta c_p)<0$

當 $p\beta<c_h+\theta c_p$ 時，顯示單位的獲利($p\beta$)低於單位的成本$(c_h+\theta c_p)$，表示存貨是不利的。使得 AP 最大化之必要條件：$\partial AP/\partial t_1=0$ 且 $\partial AP/\partial Q=0$。因此，我們得到以下二個條件

$$-c_0\left(1+\frac{dt_2}{dt_1}\right)=(p\beta-c_h-\theta c_p)\left(\frac{K}{\theta+\beta}\right)\left(t_2-t_1\frac{dt_2}{dt_1}\right)，\tag{15}$$

及

$$\partial AP/\partial Q=\frac{1}{T^2}\left[c_0-\frac{K}{\theta+\beta}t_1(p\beta-c_h-\theta c_p)\right]\frac{dt_2}{dQ}<0，\tag{16}$$

其中

$$\frac{dt_2}{dQ}=\frac{\left(e^{-(\theta+\beta)(t_1+t_2)}-1\right)}{Q(\theta+\beta)+\alpha}<0。\tag{17}$$

由方程式(16)得知 $Q^*=0$，將 $Q^*=0$ 代入方程式(15)可得

$$0<\frac{-c_0(\theta+\beta)}{(p\beta-c_h-\theta c_p)}=Kt_2-(K-\alpha)e^{-(\theta+\beta)t_1}(t_2+t_1)，\tag{18}$$

其中

$$t_2=\frac{1}{\theta+\beta}\ln\left[\frac{K}{\alpha}-\frac{K-\alpha}{\alpha}e^{-(\theta+\beta)t_1}\right]。\tag{19}$$

接著，驗證方程式(18)是否有解，令

$$U(t_1) = Kt_2 - (K-\alpha)e^{-(\theta+\beta)t_1}(t_2 + t_1)。 \tag{20}$$

對 $U(t_1)$取t_1之一階導數，得

$$U'(t_1) = (\theta+\beta)(K-\alpha)e^{-(\theta+\beta)t_1}(t_2 + t_1) > 0。 \tag{21}$$

由於 $U(0)=0$，利用方程式(21)得知在方程式(18)存在一個唯一解t_1 (大於 0)。由此可得以下定理。

定理 2. 若$(p\beta - c_h - \theta c_p) < 0$， 最適的存貨水準終點值$Q^*=0$，方程式(18)中存在一個唯一解$t_1^*$使得方程式(8)中之 AP 達到最大。

證明：利用方程式(8)、(18)、(20)及(21)即可得證。

4. 數值範例

利用數值範例驗證本文所提出之模型的適用性。

範例 1：在 $(p\beta - c_h - \theta c_p) \geq 0$ 之情形下，假設每次設置成本 $c_0=\$100$，每單位時間的生產速率 $K=250$ 單位，每單位時間的$\alpha=100$ 單位，每單位時間每件產品的持有成本 $c_h=\$1$，每單位產品的生產成本$c_p=\$1$，每單位產品的獲利 $p=\$10$，產品的退化率$\theta=0.2$， $\beta=0.2$， 存貨水準的最大容許量 $S=250$ 單位。由於(12), (10) 與 (11)是非線性函數且不易求解，我們使用軟體 Maple 9.5 來求解。計算結果得到以下的最適值：$Q^*=141.6577$， $t_1^*=1.5605$， $t_2^*=0.6105$ 及 $AP^*=1113.3261$。由此結果顯示，在追求利潤最大的目標下，當存貨是有利時，最適的存貨終點值Q^*不為零。

範例 2：在 $(p\beta - c_h - \theta c_p) < 0$ 之情況下，假設每次設置成本 $c_0=\$100$，每單位時間的生產速率 $K=250$ 單位，每單位時間的$\alpha=100$ 單位，每單位時間每件產品的持有成本$c_h=\$1$，每單位時間產品的生產成本$c_p=\$1$，每單位產品的獲利 $p=\$5$，產品的退化率$\theta=0.1$, $\beta=0.2$，存貨水準的最大容許量 $S=250$ 單位。使用軟體 Maple 9.5 來求解方程式(18)，我們得到最適值為 $t_1^*=1.6928$，$t_2^*=1.5611$。由方程式 (8)，可得 $AP^*=459.2471$。

5. 結論

本文提出一個在儲存空間有限下，退化性產品的生產存貨模式。藉由模式的求解及最佳解的探討，可得在管理上直覺而合理的結論： (1) 若單位的獲利($p\beta$) 高於單位的成本$(c_h+\theta c_p)$，即 $p\beta - c_h - \theta c_p \geq 0$ 時，表示增加存貨是有利的策略，因此製造商的

最適生產策略為不停地生產且累積存貨直至達到最大容許的存貨水準時才停止生產。

(2) 若單位的獲利($p\beta$) 低於單位的成本 $(c_h+\theta c_p)$，即 $p\beta-c_h-\theta c_p<0$ 時，表示增加存貨是不利的策略，此時，製造商的最適的存貨策略為使期末存貨水準為 0。此外，由定理 1 和 2 可決定出在不同情況下之最適的生產策略，並且證明此最適解不僅存在，且是唯一的。最後，數值範例 1 說明在存貨是有利的情況下（ $p\beta-c_h-\theta c_p \ge 0$），最適的生產時間、生產存貨週期、起始及最終存貨水準及平均利潤；同時驗證定理 1 的結果。數值範例 2 說明在存貨是不利的情況下（ $p\beta-c_h-\theta c_p < 0$），最適的生產時間、生產存貨週期及平均利潤，此時，最適的起始及最終存貨水準為 0；此最適解亦驗證定理 2 的結果。藉由這兩個數值範例驗證了本文所提之模型的適用性。

參考文獻

1. Aggarwal, S. P. (1978), “A note on an order level inventory model for a system with constant rate of deterioration,” *Opsearch*, 15, pp.184-187.
2. Baker, R. C. and Urban, T. L. (1988), “A deterministic inventory system with an inventory level dependent demand rate,” *Journal of the Operational Research Society*, 39, pp.823-831.
3. Bar-Lev, Shaul K., Parlar, Mahmut and Perry, David(1994), “ On the EOQ model with inventory-level-dependent demand rate and random yield,” *Operations Research Letters*, 16, pp.167-176.
4. Chang, C.-T. (2004), “Inventory model with stock-dependent demand and nonlinear holding costs for deteriorating items,” *Asia-Pacific Journal of Operational Research*, 21, pp.435-446.
5. Chung, K.-J., Chu, P. and Lan, S.-P. (2000), “A note on EOQ models for deteriorating items under stock dependent selling rate,” *European Journal of Operational Research*, 124, pp. 550-559.
6. Covert, R. B., and Philip, G. S. (1973), “An EOQ model with Weibull distribution deterioration,” *AIIE Transactions*, 5, pp.323-326.
7. Datta, T. K. and Pal, A. K. (1990), “A note on an inventory model with inventory level dependent demand rate,” *Journal of the Operational Research Society*, 41, pp.971-975.
8. Dave, U., and Patel, L. K. (1981), “(T, Si) policy inventory model for deteriorating items with time proportional demand,” *Journal of the Operational Research Society*, 32, pp.137-142.
9. Ghare, P. M., and Schrader, G. P. (1963), “A model for an exponentially decaying inventory,” *Journal of Industrial Engineering*, 14, pp.238-243.
10. Goyal, S. K., and Giri, B. C. (2001), “Recent trends in modeling of deteriorating inventory,” *European Journal of Operational Research*, 134, pp.1-16.
11. Hariga, M. A. (1996), “Optimal EOQ models for deteriorating items with time-varying demand,” *Journal of the Operational Research Society*, 47, pp.1228-1246.
12. Levin, R. I., McLaughlin, C. P. (1972), Lamone, R.P. and Kottas, J.F., *Productions / Operations Management: Contemporary Policy for Managing Operating Systems*, McGraw-Hill, New York, p. 373.
13. Mandal, B. N. and Phaujder, S. (1989), “An inventory model for deteriorating items and stock-dependent consumption rate,” *Journal of the Operational Research Society*, 40, pp.483-488.
14. Padmanabhan, G. and Vrat, P. (1995), “EOQ models for perishable items under stock dependent selling rate,” *European Journal of Operational Research*, 86, pp.281-292.
15. Pal, S., Goswami, A. and Chaudhuri, K. S. (1993), “A deterministic inventory model for deteriorating items with stock-dependent rate,” *International Journal of Production*

Economics, 32, pp.291-299.

16. Ray, J. and Chaudhuri, K. S. (1997), "An EOQ model with stock-dependent demand, shortage, inflation and time discounting," *International Journal of Production Economics*, 53, pp.171-180.
17. Ray, J., Goswami, A. and Chaudhuri, K. S. (1998), "On an inventory model with two levels of storage and stock-dependent demand rate," *International Journal of Systems Science*, 29, pp.249-254.
18. Silver, E. A. and Peterson, R. (1982), *Decision Systems for Inventory Management and Production Planning*, 2nd edition, Wiley, New York.
19. Urban, T. L. (1992), "An inventory model with an inventory-level-dependent demand rate and relaxed terminal conditions," *Journal of the Operational Research Society*, 43, pp.721-724.