考慮延遲付款及部份欠撥之二階段退化性商品訂購策略

莊鎧溫
南華大學管理科學研究所 助理教授
林經富
南華大學管理科學研究所 研究生

摘要

存貨問題往往是企業在運作過程中不可欠缺的環節。在實務上有許多商品在儲存初期較不易發生退化，而是在一段時間後，才開始產生腐壞、超過保存期限的現象，我們稱此類商品爲二階段退化性商品。本研究在允許部份欠撥及延遲付款的情形下，探討了此類商品的存貨模型，並依缺貨、延遲付款的期限分三個個案分別探討，求出最小總變動成本。在本文中假設需求率與待撥率爲一固定常數，退化率在存貨開始時爲零，在一段時間後則成一固定常數。

關鍵字：存貨模型、二階段退化性商品、延遲付款、部份欠撥

通訊作者：莊鎧溫、林經富
聯絡電話：05-2721001 轉 56534、0921-337439
聯絡地址：台中市北屯區陳平路 84 號
E-mail：kwchuang@mail.nhu.edu.tw、linlin375@hotmail.com

壹、緒論

企業在面臨外在競爭的情況下，如何有效降低成本，提升企業獲利，為當今企業無法避免的課題。存貨系統的運作往往在企業的成本體系中扮演相當重要的角色，因此如何找出最適的存貨模式使企業成本最小化，將決定企業的競爭力大小。

商品的退化為存貨系統中難以避免的問題。多數的商品（如穀物、蔬果、酒精等）會隨著時間產生腐壞、變質或超過保存期限等狀況，繼而導致商品無法販售，並產生處理成本，稱之為退化成本。在 Ghare 和 Schrader(1963)的研究中首先加入了退化的概念，並假設退化率為一固定常數。Abad(2000)探討了在固定退化率下加入允許缺貨之商品的最佳批量模型。然而就實務上來說，商品在存貨初期尚不會發生退化現象，Wu、Ouyang 和 Yang(2006)提出二階段退化性商品的存貨模型，並探討了缺貨的情形。在商品在儲存的初期退化率為零，在一段時間後則呈一個固定的退化率發生退化。

缺貨發生的時候，有些顧客不願意等待欠撥，因而轉而向其它廠商購買，導致在缺貨期間需求率減少的問題，其損失的部份，我們稱為損失銷售成本。Park(1982)首先在缺貨其間加入一個固定常數的欠撥率。在相關的文獻中，Wee(1995)、Abad(2000)亦發展了在不同狀況下，欠撥率為介於 0 到 1 之固定常數的存貨模型。

當零售商自供應商處收到貨品時，必需支付商品成本予供應商。然而在實務上，支付的方法未必是即時付款。更常見的是供應商會提供一個付款期限給零售商，或由零售商與供應商協議付款期限。在這段期間內，零售商的所得將可得到一筆利息收入；反之，在付款期限後若有未售出的商品，則有商品積壓的利息支出。Haley 與 Higgins(1973)首先提出在允許延遲付款條件下之經濟訂購量批量模型。Goyal (1985)則在允許延遲付的款條件下，建立含有利息收入與利息支出的存貨模型。Aggaewal 與 Jaggi(1995)在不允許缺貨的狀況下，探討了退化性商品加入延遲付款概念的存貨模型，其退化率為固定常數。Jamal et al.(1997)再將 Aggaewal 與 Jaggi(1995)的模型延伸至允許缺貨的情況。此外 Liao et al.(2000)、Chang & Dye(2001)及 Chang(2004)等學者均探討了在不同條件下，允許延遲付款的存貨模型。

本研究欲在允許部份欠撥及延遲付款的情形下，探討二階段退化性商品的存

貨模型。在固定的欠撥率及需求率下，將商品的付款期限分三個案例分別探討，找出最小總變動成本，並介紹求解過程與方法。文末將對各參數進行敏感度分析，以瞭解各參數的變化對模型的影響。

貳、基本假設及符號說明

本研究中所使用之符號如下：

D	需求率(units/unit time)
θ	退化率 $(0\leqq \theta \leqq 1)$
P	銷售價格($/unit)
B	部分欠撥率
$I(t)$	商品於時間 t 時的存貨水準
I_{max}	最大的存貨水準
I_{min}	最大的缺貨水準
T	週期時間
t_d	退化開始時間
t_1	商品耗用完所需時間
M	延遲付款期限
S	期初之設置成本($/cycle)
C_h	持有存貨成本($/ unit)
C_d	存貨退化成本($/ unit)
C_p	商品成本($/ unit)
C_s	缺貨成本($/ unit)
I_e	資金賺取之利率($/ unit)
I_c	支付資金積壓成本之利率($/ unit)
TI_e	總利息收入
TI_c	總利息支出

在建立存貨模型之前，本研究進行以下假設：

(1) 探討單一產品在固定期間存貨情況。

(2) 需求爲固定常數。

(3) 缺貨發生時允許部份欠撥。

(4) 商品在時間 t_d之前不會退化，t_d之後商品開始退化，退化率θ為界於 0 到 1 之間的固定函數(0≦θ≦1)；已退化商品無法替換和修補。

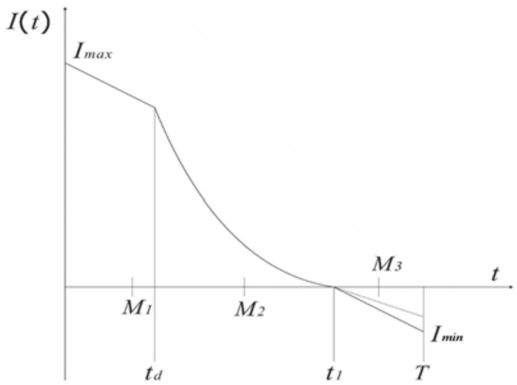
(5) 在延遲付款期限(M)前有利息收入，反之則有利息支出。

(6) 售價大於商品成本。

(7) 支付資金積壓成本之利率大於資金賺取之利率

參、模型發展

首先根據本研究的假設，繪出商品存貨水準與時間之關係圖，如圖一所示。



圖一 考慮延遲付款及部份欠撥之二階段退化性商品訂購策略

週期始於庫存的最高點，在這段時間內庫存的變化僅有需求的消耗，可表示如下：

$$\frac{dI_1(t)}{dt} = -D \qquad 0<t<t_d \tag{1}$$

當時間過 t_d後，存貨開始發生退化

$$\frac{dI_2(t)}{dt} + \theta I_2(t) = -D \qquad t_d<t<t_1 \tag{2}$$

當 $t=t_1$時，存貨水準為 0，此時開始發生缺貨，並出現部份欠撥

$$\frac{dI_3(t)}{dt} = -BD \qquad t_1<t<T \tag{3}$$

代入邊界條件 $I(0)=I_{max}$，$I(t_1)=0$，解微分方程的結果，各階段存貨水準可用以下公式表示：

$$I_1(t) = I_{\max} - tD \qquad 0<t<t_d \tag{4}$$

$$I_2(t) = \frac{D}{\theta}(e^{(t_1-t)\theta} - 1) \qquad t_d<t<t_1 \tag{5}$$

$$I_3(t) = -BD(t-t_1) \qquad t_1 < t < T \tag{6}$$

當 $t=t_d$ 時，$I_1(t_d)=I_2(t_d)$，代入(4)(5)式後可求得最高存水準 I_{max}

$$I_{\max} = \frac{D}{\theta}(e^{(t_1-t_d)\theta} + t_d\theta - 1) \tag{7}$$

存貨系統之相關成本項目如下：

持有成本發生在存貨水準大於零的時期$[0,t_1]$。

$$\begin{aligned} HC &= C_h\left(\int_0^{t_d}(I_{\max} - tD)dt + \int_{t_d}^{t_1}\frac{D}{\theta}(e^{(t_1-t)\theta} - 1)dt\right) \\ &= \frac{C_h D}{2\theta^2}\left(2e^{(t_1-t_d)\theta}(t_d\theta+1) + t_d^{\,2}\theta^2 - 2t_1\theta - 2\right) \end{aligned} \tag{8}$$

時間過 t_d後，商品開始退化，這段期間內將產生退化成本：

$$\begin{aligned} DC &= C_d\left(I_{\max} - \int_0^{t_d} Ddt - \int_{t_d}^{t_1} Ddt\right) \\ &= \frac{C_d D}{\theta}\left(e^{(t_1-t_d)\theta} - (t_1 - t_d)\theta - 1\right) \end{aligned} \tag{9}$$

當 $t=t_1$ 時，存貨已消耗完畢，此時在部分欠撥的部份將有缺貨成本：

$$\begin{aligned} SC &= -C_s\int_{t_1}^{T} BD(t_1 - t)dt \\ &\frac{BDC_s}{2}(T-t_1)^2 \end{aligned} \tag{10}$$

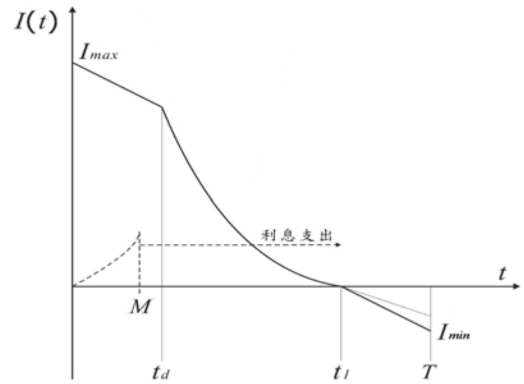
在缺貨時期，有損失銷售的機會成本

$$LC = -P\int_{t_1}^{T}(1-B)(t_1-t)Ddt = \frac{1}{2}PD(1-B)(T-t_1)^2 \tag{11}$$

本研究考慮延遲付款，在利息收支部分可分爲三個案例探討：

Case1　$0<M<t_d$

延遲付款期限小於退化開始時間，此時會有利息支出及利息收入。在付款期限 M 之前，有利息收入；過了延遲付款期限 M 之後，則必須支付利息。



圖二 $0<M<t_d$之利息收支圖

總利息支出

$$
\begin{aligned}
TI_c &= C_p I_c \left(\int_M^{t_d} \left(\frac{D}{\theta}\left(e^{(t_1-t_d)\theta} + t_d\theta - 1\right) - tD \right) dt + \int_{t_d}^{t_1} \frac{D}{\theta}\left(e^{(t_1-t)\theta} - 1\right) dt \right) \\
&= \frac{C_p I_c D}{2\theta^2}\left(-2+\theta(2M-2t_1+(M-t_d)^2\theta)+2e^{(t_1-t_d)\theta}(1-M\theta+t_d\theta)\right)
\end{aligned}
\tag{12}
$$

總利息收入

$$
TI_e = PI_e \int_0^M Dtdt = \frac{1}{2} I_e M^2 PD \tag{13}
$$

總成本(TC_1)=設置成本(S)＋持有成本(HC)＋退化成本(DC)＋缺貨成本(SC)＋機會損失成本(LC)＋總利息支出(TI_c)-總利息收入(TI_e)

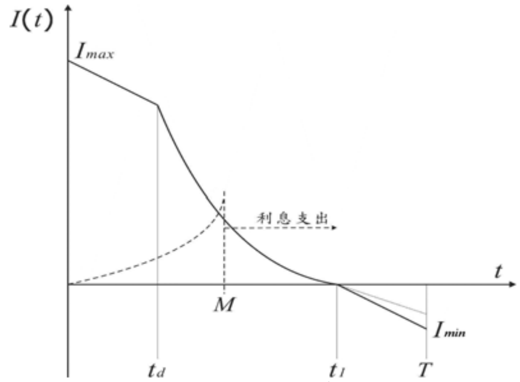
$$
\begin{aligned}
TC_1 &= S + \frac{C_h D}{2\theta^2}\left(2e^{(t_1-t_d)\theta}(t_d\theta+1)+t_d{}^2\theta^2-2t_1\theta-2\right)+\frac{C_d D}{\theta}\left(e^{(t_1-t_d)\theta}-(t_1-t_d)\theta-1\right) \\
&+\frac{BDC_s}{2}(T-t_1)^2+\frac{PD}{2}(1-B)(T-t_1)^2 \\
&+\frac{C_p I_c D(-2+\theta(2M-2t_1+(M-t_d)^2\theta)+2e^{(t_1-t_d)\theta}(1-M\theta+t_d\theta))}{2\theta^2}-\frac{1}{2}I_e M^2 PD
\end{aligned}
\tag{14}
$$

再將總成本除以時間，即可求得總變動成本

$$
TVC_1 = TC_1 / T \tag{15}
$$

Case 2　$t_d < M < t_1$

在付款期限 M 之前，有利息收入；過了延遲付款期限 M 之後，則必須支付利息。與案例一不同的是，本案例之利息支出發生在商品開始退化之後。



圖三 $t_d<M<t_1$ 之利息收支圖

總利息支出

$$\begin{aligned} TI_c &= C_p I_c \int_M^{t_1} \frac{D}{\theta}\left(e^{(t_1-t_d)\theta}-1\right)dt \\ &= \frac{C_p I_c D}{\theta^2}\left(e^{(t_1-M)\theta}+\theta(M-t_1)-1\right) \end{aligned} \tag{16}$$

總利息收入

$$TI_e = PI_e \int_0^M Dtdt = \frac{1}{2} I_e M^2 PD \tag{17}$$

總成本(TC_2)=設置成本(S)+持有成本(HC)+退化成本(DC)+缺貨成本(SC)+機會損失成本(LC)+總利息支出(TI_c)-總利息收入(TI_e)

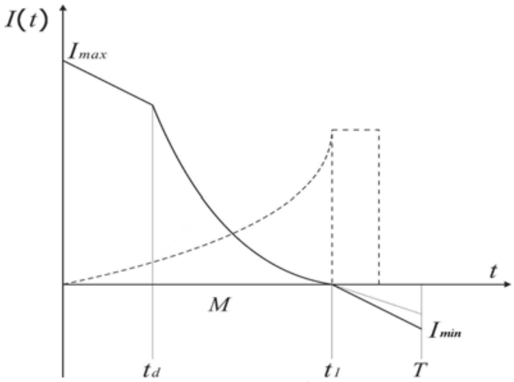
$$\begin{aligned} TC_2 &= S+\frac{C_h D}{2\theta^2}\left(2e^{(t_1-t_d)\theta}(t_d\theta+1)+t_d^{\,2}\theta^2-2t_1\theta-2\right)+\frac{C_d D}{\theta}\left(e^{(t_1-t_d)\theta}-(t_1-t_d)\theta-1\right) \\ &+\frac{BDC_s}{2}(T-t_1)^2+\frac{PD}{2}(1-B)(T-t_1)^2+\frac{C_p I_c D(e^{(t_1-M)\theta}+M\theta-t_1\theta-1)}{\theta^2} \\ &-\frac{1}{2} I_e M^2 PD \end{aligned} \tag{18}$$

再將總成本除以時間，即可求得總變動成本

$$TVC_2 = TC_2 / T \tag{19}$$

Case 3 $t_1 < M$

延遲付款限期大於於商品售完之時間，因此無利息支出項目。唯在 t_1 之後，商品以銷售完畢，因此利息收入將固定。



圖四 $t_1<M$之利息收支圖

此時間內將有總利息收入

$$TI_e = PI_e(\int_0^{t_1} Dtdt + (M-t_1)Dt_1) = \frac{1}{2}PI_e(2M-t_1)t_1D \tag{20}$$

總成本(TC_2)=設置成本(S)＋持有成本(HC)＋退化成本(DC)＋缺貨成本(SC)＋機會損失成本(LC)-總利息收入(TI_e)

$$\begin{aligned}TC_3 &= S+\frac{C_hD}{2\theta^2}\left(2e^{(t_1-t_d)\theta}(t_d\theta+1)+t_d{}^2\theta^2-2t_1\theta-2\right)+\frac{C_dD}{\theta}\left(e^{(t_1-t_d)\theta}-(t_1-t_d)\theta-1\right)\\ &+\frac{BDC_s}{2}(T-t_1)^2+\frac{PD}{2}(1-B)(T-t_1)^2+\frac{1}{2}PI_e(2M-t_1)t_1D\end{aligned} \tag{21}$$

再將總成本除以時間，即可求得總變動成本

$$TVC_3 = TC_3/T \tag{22}$$

透過(15)、(19)、(22)式，我們可以找出最佳的總變動成本。首先第一步要找出決策變數。在本研究中，決策變數爲 t_1與 T，故此必須將總變動成本函數 TVC 對 t_1與 T進行一階微分，並令其爲零。即

$$\frac{\partial TVC}{\partial t_1}=0 \tag{23}$$

與

$$\frac{\partial TVC}{\partial T}=0 \tag{24}$$

由於聯立方程式求解困難，本研究採用牛頓勘根法求出最佳的 t_1^*, T^*。爲確認所得之結果爲最小值，在此對 $TVC(t_1, T)$對 t_1, T進行二次微分，並代入 t_1^*, T^*，若滿足以下條件，則可確認(t_1^*, T^*)爲最小化之總變動成本：

$$\frac{\partial^2 TVC}{\partial T^2}>0 \tag{25}$$

$$\frac{\partial^2 TVC}{\partial t_1^2}>0 \tag{26}$$

$$\left(\frac{\partial^2 TVC}{\partial T^2}\right)\left(\frac{\partial^2 TVC}{\partial t_1^2}\right)-\frac{\partial^2 TVC}{\partial T \partial t_1}>0 \tag{27}$$

肆、數值範例

在數值範例的部份，本研究假設以下參數：S=200，C_h=3，C_d=10，C_s=2，C_p=15，P=25，t_d=30/365，M=15/365，I_e=0.05，I_c=0.12， D=2000，θ=0.1，B=0.7。由於在此案例中 $M<t_d$，因此我們用案例一的解法，首先令 $\frac{\partial TVC_1}{\partial t_1}=0$ 、$\frac{\partial TVC_1}{\partial T}=0$ ，接下來以牛頓法找出 t_1^* = 0.156675、T^*=0.241682，再將以上參數代入 $TVC(t_1^*, T^*)$中，可求出最小總變動成本 TVC^*爲 1513.12。

爲確認所得之結果爲最佳解，在此對 $TVC(t_1, T)$對 t_1, T 進行二次微分，並代入(25)到(27)式，其結果均大於零，因此可以確認當 t_1^*=0.156675、T^*=0.241682 時，有最小總變動成本爲 TVC^*=1513.12。

案例二調整延遲付款期限 M=75/365=0.205479。求解可得最佳 t_1^* =0.1803、T^*=0.247506，其中 $M> t_1^*$與本案例中假設延遲付款的期限發生在 t_1之前不符，因此在本案例中無可行解。

案例三則延續案例二數值。經求解可得 t_1^* =0.177559、T^*= 0.244676，最小總變動成本 TVC^*= 1194.67。

比較結果，可以發現在不改變其他參數的情形下，當延遲付款期限越長，總變動成本越低。在案例三中，延遲付款的期限發生在缺貨開始之後，並有最小總變動成本 1194.67 爲最低，爲假設參數下之最佳化成本模型。

伍、敏感度分析

爲探討在模型中各參數對總成本的影響及其變動情形，在不改變其它參數的情況下，針對各參數進行調整，找出其變化對總成本的影響。在進行敏感度分析前，其參數之設定如下：S=200，C_h=3，C_d=10，C_s=2， P=25，t_d=30/365，M=75/365，I_e=0.05， D=2000，θ=0.1，B=0.7。

表一　敏感度分析

Changing parameter	Change(%)	Change in t_1^*(%)	Change in T^*(%)	Change in TVC^*(%)
B	+20%	-4.38	9.4	-6.91
	+10%	-1.83	3.76	-2.89
	-10%	1.38	-2.7	2.18
	-20%	2.45	-4.73	3.88
I_e	+20%	-1.45	-2.04	-3.58
	+10%	-0.74	-1.03	-1.78
	-10%	0.77	1.04	1.76
	-20%	1.56	2.09	3.51
θ	+20%	-1.66	-1.03	0.63
	+10%	-0.84	-0.52	0.32
	-10%	0.87	0.54	-0.33
	-20%	1.77	1.10	-0.67
t_d	+20%	-1.02	1.16	0.56
	+10%	-0.53	0.57	0.26
	-10%	0.57	-0.54	-0.23
	-20%	1.19	-1.05	-0.43

透過敏感度分析的結果可以發現，當部份欠撥率提高時，對企業降低存貨成本有較顯著的影響，透過部份欠撥率的提高，企業可以有效降低總變動成本；提高利息收入的利率對企業的成本控制亦有相當的助益；此外，退化率與發生退化的時間在本模型的總變動成本上影響較小。

陸、結論

企業在面臨存貨決策問題時，決策結果往往左右利潤的高低，尤其面臨低毛利時代的企業體，更需注重存貨管理所帶來的成本問題。爲提升企業存貨的管理效率，本研究提出了成本最小化的存貨模型。

在本研究中，探討了在允許延遲付款及部份欠撥的情況下，二階段退化性商品的存貨模型。研究結果發現企業的成本支出將隨付款期限的延長而顯著降低，因此與供應商議定較長的付款期限爲企業當務之急的工作；此外，在付款期限前，企業可從中獲得利息收入，若企業能有效運用規劃利率較高的存款模式，對

降低企業成本的貢獻將更爲顯著。

在後續研究上，可以考慮在二階段退化性商品的退化率加入韋伯分配的函數；又本研究在缺貨階段的欠撥率爲固定常數，但不願意等待欠撥的顧客可能會隨時間遞增，故欠撥率可以考慮爲隨時間變化的概念。

柒、參考文獻

1. Abad, P. L. (2000). Optimal lot size for a perishable good under conditions of finite production and partial backordering and lost sale, Computer & Industrial Engineering, Vol. 38, pp.457-465.
2. Aggaewal, S. P. and Jaggi, C. K.(1995). Ordering polices of deteriorating items under permissible delay in payment., Journal of the Operational Research Society, Vol.46, pp.458-462.
3. Chang, C. T. (2004). An EOQ model with deteriorating items under inflation when supplier credits linked to order quantity, International. Journal Production Economics, 88,pp. 307-316.
4. Chang, H. J., Dye C. Y. (2001). An inventory model for deteriorating items with partial backlogging and permissible delay in payments, International Journal of System Science, Vol 32, 3, pp. 345-352.
5. Covert, R. B. and Philip, G. S. (1973). An EOQ model with Weibull distribution deterioration, AIIE Transactions, Vol. 5, pp. 323-326.
6. Ghare, P.M., Schrader, G.H.(1963). A model for exponentially decaying inventory system. International Journal of Production Research 21, pp.449-460.
7. Goyal, S. K. (1985). Economic order quantity under conditions of permissible delay in payments, Journal of the Operational Research Society, Vol. 36, No. 4, pp. 335-339.
8. Haley, C.W., Higgins, R.C. (1973). Inventory policy and trade credit financing, Management Science,Vol.20, pp.464-471.
9. Jamal ,A.M., Sarker, B. R., and Wang, S. (1997). An ordering policy for deteriorating items with allowable shortage and permissible delay in payment, Journal of the Operational Research Society, Vol.48, pp.826-833.
10. Liao, H.C., Tsai C.H. and Su, C.T. (2000). An inventory model with deteriorating

items under inflation when a delay in payment is permissible. International Journal Production Economics, 101, pp.369-384.

11. Park, K. S. (1982). Inventory models with partial backorders, International Journal of System Science, Vol.13, pp. 1313-1317.
12. Wee, H. M. (1995). A deterministic lot-size inventory model for deterioration items with shortages and a declining market, Computers & Industrial Engineering, Vol.22, pp. 345-356.
13. Wu K.S., Ouyang L.Y. and Yang C.T.(2006). An optimal replenishment policy for non-instantaneous deteriorating items with stock-dependent demand and partial backlogging, International Journal Production Economics, 101, pp. 369-384.

An ordering policy for non-instantaneous deteriorating items with allowable partial backlogging and permissible delay in payment

Kai-Wayne Chuang
Nanhua University Graduate
Institute of Management
Sciences
Assistant Professor
Jing-Fu Lin
Nanhua University Graduate Institute of Management Sciences
Graduate Student

Abstract

The inventory system is taking an important part of cost controlling in business operation. In real life, many goods would be kept for a period without deterioration, but a fixed duration later the goods is starting to deteriorate. We named these kinds of goods as “non-instantaneous deteriorating items”. Under the situation which allowing partial backlogging and delay in payment, the inventory model in this study is divided into three cases by the time of shortage and the delay in payment, and we aim to find out the minimum relevant inventory cost per unit time. The study assumed that the demand rate and backlogging rate are keeping constant. Initialing the model, the goods won’t deteriorate, but starting to deteriorate in a constant rate after a fixed period later.

Keywords：Inventory model、non-instantaneous deteriorating items、delay in payment、partial backlogging